חוברת שיעורי-בית

חשבון אינפיטסימלי – קורס ראשון

תוכן עניינים

הקדמה

שלום,

לפניכם חוברת הניתנת לכל מי שצופה בקורס עם חן הררי באתר סטאדיס www.Studies.co.il.

נא קראו בעיון את הדברים הבאים לפני שאתם מתחילים לעבוד עם החוברת.

איך לעבוד נכון עם חוברת שיעורי-הבית?

גילוי נאות – אני מאוהב במתמטיקה. שהרי מה תפקיד המתמטיקאי בעולם אם לא לחשוף עוד טפח מהמציאות המרתקת הסובבת אותנו – ממש כמו הארכיאולוג כך גם המתמטיקאי לא מוצא או ממציא, אלא מגלה וחושף אמיתות עתיקות שחיכו בבטן האדמה המתמטית לגילויים לעולם.

חוברת זו המונחת לפניכם מכילה עשרות שאלות שכתבתי עבורכם לאור נסיוני במשך שנים רבות בלימוד המתמטיקה ובחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי בפרט החל מהסמסטר השלישי שלי בתואר בטכניון ועד היום.

כעת, כדי לעבוד נכון עם החוברת, אנא קראו בעיון את הדגשים הבאים:

1) צפייה בקורס המצולם – הדגש הראשון לעבודה נכונה עם החוברת הוא לצפות בקורס באתר סטאדיס ולוודא שאתם מבינים את כל השאלות שם. השאלות בקורס הן שאלות שאוהבים לשאול במבחנים ושאלות שמופיעות כל הזמן במבחנים. מפאת אילוצי הזמן, בניתי חוברת זו שאליה הכנסתי את כל השאלות שלא הספקתי לפתור בקורס. לכל השאלות צירפתי פתרון מסודר וברור ככל הניתן.

2) עבודה נכונה עם החוברת – הדרך הנכונה ביותר לעבוד עם החוברת היא לפתור בה את כל התרגילים עד לנושא שאליו הגעתם בקורס. למשל אם התקדמנו עד נושא רציפות וגזירות, אז תוכלו לפתור את כל השאלות בחוברת עד נושא זה. וכך הלאה ממשיכים להתקדם עד לפתרון כל תרגילים בחוברת.

3) יש לזכור שבמקביל לעבודה עם חוברת זו יש להמשיך לעבוד ולהתקדם בשאר האגפים –
להמשיך לצפות בקורס, להמשיך לשנן הוכחות ולהמשיך לשנן מושגים והגדרות מחוברת סיכום הקורס.
תעבדו לפי שלבים אלו ובעזרת ה' תראו הצלחה.

בהצלחה!

גבולות של פונקציות

שאלה מספר 1 – חישוב גבול

חשב את הגבולות הבאים:

א) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

ב) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$

ג) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}$

ד) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{\sin x}$

פתרון

א) הגבול המפורסם: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

ב) הגבול המפורסם: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$

ג) חסום כפול שואף לאפס: $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x=0$

ד) אין גבול לפי היינה. ניקח שתי סדרות x_n , $\overline{x}_n$, ששואפות ל- ∞:

$$x_n = \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$\overline{x}_n = \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

אבל מתקבלים גבולות שונים:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\overline{x}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{x}_n}{\sin \overline{x}_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n + \frac{\pi}{2}}{\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n + \frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n + \frac{\pi}{2}}{1} = \lim_{n\to\infty}\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sin x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n - \frac{\pi}{2}}{\sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n - \frac{\pi}{2}}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n - \frac{\pi}{2}}{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(-2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = -\infty$$

לכן הגבול לא קיים לפי היינה.

שאלה מספר 2 – חישוב גבול

חשב את הגבולות הבאים:

א) $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

ב) $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

ג) $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

ד) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

פתרון

א) הגבול המפורסם: $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}=1$.

אפשר גם על-ידי מעבר למשתנה אחר: $t=\frac{1}{x}$, מכאן:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

ב) חסום כפול שואף לאפס: $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

ג) אין גבול לפי היינה. ניקח שתי סדרות x_n , $\overline{x}_n$, ששואפות ל- 0:

$$x_n=\frac{1}{2\pi n}\underset{n\to\infty}{\to}0$$

$$\overline{x}_n=\left(\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\right)\underset{n\to\infty}{\to}0$$

אבל מתקבלים גבולות שונים:

$$\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi n}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sin\left(2\pi n\right)}_{\equiv 0}=\lim_{n\to\infty}0=0$$

$$\lim_{n\to\infty}f\left(\overline{x}_n\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{\overline{x}_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{2\pi n}+\frac{\pi}{2}\right)}_{\equiv 1}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

לכן הגבול לא קיים לפי היינה.

ד) נשים-לב כי הגבול מתנהג כמו: $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} \sim 0^0$

נעזר בכלל הלוגריתמי: $b = a^{\log_a b}$

או בצורתו הטבעית: $\boxed{b = e^{\ln b}}$

מכאן נחזור לתרגיל: $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x\cdot\ln x}$

מכיוון שהפונקציה e^x היא רציפה, ניתן לחשב את הגבול שבחזקה ולקבל $e^{f(x)} \to e^L$:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x}^{\sim 0\cdot -\infty} = \overbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}^{\sim\frac{-\infty}{\infty}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\to 1} \underbrace{\tan x}_{\to 0} = 0$$

מכאן הגבול המבוקש הינו:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1$$

שאלה מספר 3 – חישוב גבול

חשב את הגבולות הבאים:

א) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$

ב) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$

ג) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

פתרון

א) חסום כפול שואף לאפס: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\cos x=0$

ב) גבולות חד-צדדיים שונים זה מזה:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x}\sim\frac{1}{0^+}=\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{x}\sim\frac{1}{0^-}=-\infty$$

לכן הגבול לא קיים.

ג) גבולות חד-צדדיים שונים זה מזה:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}-1=-1$$

לכן הגבול לא קיים.

שאלה מספר 4 – חישוב גבול

חשב את הגבול הבא: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\ln x}-e^{x-1}}{x^3+2x^2-3}$

פתרון

בהצבת $x=1$, מתקבל ביטוי מהצורה של $\frac{0}{0}$. לכן נפעיל את כלל לופיטל. גזירת המכנה היא פשוטה (פולינום), המונה קצת יותר מאתגר. המונה מורכב מהאקספוננט e^{x-1}, שאותו לא קשה לגזור ומהביטוי $x^{\ln x}$ שהוא קצת יותר מאתגר לגזירה. ניקח את האחרון לשיחה אישית בצד. נעזר בחוק הלוגריתמי לפיו:

$$a^{\log_a b}=b$$

ובפרט כאשר מדובר ב- $\log_e x\triangleq\ln x$ אזי:

$$(1)\qquad \boxed{e^{\ln b}=b}$$

כמו-כן ניזכר בחוק נוסף לפיו:

$$(2)\qquad \boxed{\ln a^b=b\cdot\ln a}$$

נחזור לביטוי שלנו:

$$y=x^{\ln x}\overset{(1)}{=}e^{\ln\left(x^{\ln x}\right)}\overset{(2)}{=}e^{\ln x\cdot\ln x}=e^{(\ln x)^2}$$

כעת נגזור ביטוי זה, כאשר נשתמש בחוק הנגזרות לפיו:

$$y=e^x \qquad y'=e^x$$

ובהרחבה:

$$\boxed{\begin{aligned}&y=e^{f(x)}\\&y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)\end{aligned}}$$

מכאן, נוכל לגזור את הביטוי שלנו:

$$y=e^{(\ln x)^2}$$

$$y'=e^{(\ln x)^2}\cdot\left(2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{2e^{(\ln x)^2}\cdot\ln x}{x}$$

כעת נוכל לחזור לתרגיל המקורי ולהשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\ln x}-e^{x-1}}{x^3+2x^2-3}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2e^{(\ln x)^2}\cdot\ln x}{x}-e^{x-1}}{3x^2+4x}=\frac{0-1}{3+4}=\boxed{-\frac{1}{7}}$$

שאלה מספר 5 – חישוב גבול

חשב את הגבול הבא: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{5^{x^2}+4^{x^2}}{5^x+4^x}\right)^{\frac{1}{x}}$

פתרון

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{5^{x^2}+4^{x^2}}{5^x+4^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln\left(\frac{5^{x^2}+4^{x^2}}{5^x+4^x}\right)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{5^{x^2}+4^{x^2}}{5^x+4^x}\right)}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln\left(\frac{5^{x^2}+4^{x^2}}{5^x+4^x}\right)}{x}}$$

נשים-לב כי הביטוי בחזקה של האקספוננט מתנהג כמו- $\frac{0}{0}$. מכיוון שהאקספוננט היא פונקציה רציפה,
נחשב בנפרד את הגבול שבחזקה על-ידי כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{5^{x^2}+4^{x^2}}{5^x+4^x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(5^{x^2}+4^{x^2}\right)-\ln\left(5^x+4^x\right)}{x}\overset{\sim\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{5^{x^2}\cdot\ln 5\cdot 2x+4^{x^2}\cdot\ln 4\cdot 2x}{5^{x^2}+4^{x^2}}-\frac{5^x\cdot\ln 5+4^x\cdot\ln 4}{5^x+4^x}\right)=-\frac{\ln 5+\ln 4}{2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 4=\ln 5^{-\frac{1}{2}}+\ln 5^{-\frac{1}{2}}=\ln\frac{1}{\sqrt{5}}+\ln\frac{1}{\sqrt{4}}=\ln\frac{1}{\sqrt{5}}+\ln\frac{1}{2}$$

לא נשכח לחזור לגבול המקורי (כל זה היה בחזקה של האקספוננט), מכאן:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{5^{x^2}+4^{x^2}}{5^x+4^x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\frac{1}{\sqrt{5}}+\ln\frac{1}{2}}=e^{\ln\frac{1}{\sqrt{5}}}\cdot e^{\ln\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{5}}}$$

הגדרת הגבול

שאלה מספר 6 – הגדרת הגבול

הוכח לפי הגדרת הגבול כי: $\lim_{x\to 1}\frac{1-7x}{4x-3}=-6$

פתרון

יהי $\varepsilon>0$. צריך למצוא $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-1|<\delta$ יתקיים: $\left|\frac{1-7x}{4x-3}+6\right|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{1-7x}{4x-3}+6\right|=\left|\frac{1-7x+24x-18}{4x-3}\right|=\left|\frac{17x-17}{4x-3}\right|=17\frac{|x-1|}{|4x-3|}<\ldots$$

נעריך את הביטוי $|4x-3|$ באמצעות הביטוי $|x-1|$. ננחש $\delta=\frac{1}{2}$, כלומר נניח ש- $|x-1|<\frac{1}{2}$:

$$1-\frac{1}{2}<x<1+\frac{1}{2}$$

$$0.5<x<1.5 \quad /\times 4$$

$$2<4x<6 \quad /-3$$

$$-1<4x-3<3$$

לא טוב. באגף שמאל יש ביטוי שלילי ואנחנו רוצים לחסום את הביטוי בערך מוחלט (גם בעייתיות בתחום ההגדרה $x\neq\frac{3}{4}$, הדלתא שבחרנו חורגת את התחום).

ננסה δ קטן יותר. למשל $\delta=\frac{1}{8}$, כלומר נניח ש- $|x-1|<\frac{1}{8}$:

$$1-\frac{1}{8}<x<1+\frac{1}{8}$$
$$\frac{7}{8}<x<\frac{9}{8} \quad \Big/ \times 4$$
$$\frac{7}{2}<4x<\frac{9}{2}$$
$$3.5<4x<4.5 \quad \Big/ -3$$
$$0.5<4x-3<1.5$$
$$0.5<|4x-3|<1.5$$

נראה כעת איך אפשר לקבל תנאי כללי על δ בלי ניחוש, כלומר נניח באופן כללי ש- $|x-1|<\delta$:

$$1-\delta<x<1+\delta \quad \Big/ \times 4$$
$$4-4\delta<4x<4+4\delta \quad \Big/ -3$$
$$1-4\delta<4x-3<1+4\delta$$
$$1-4\delta<|4x-3|<1+4\delta$$
$$\Rightarrow 1-4\delta>0 \Rightarrow 0<\delta<\frac{1}{4}$$

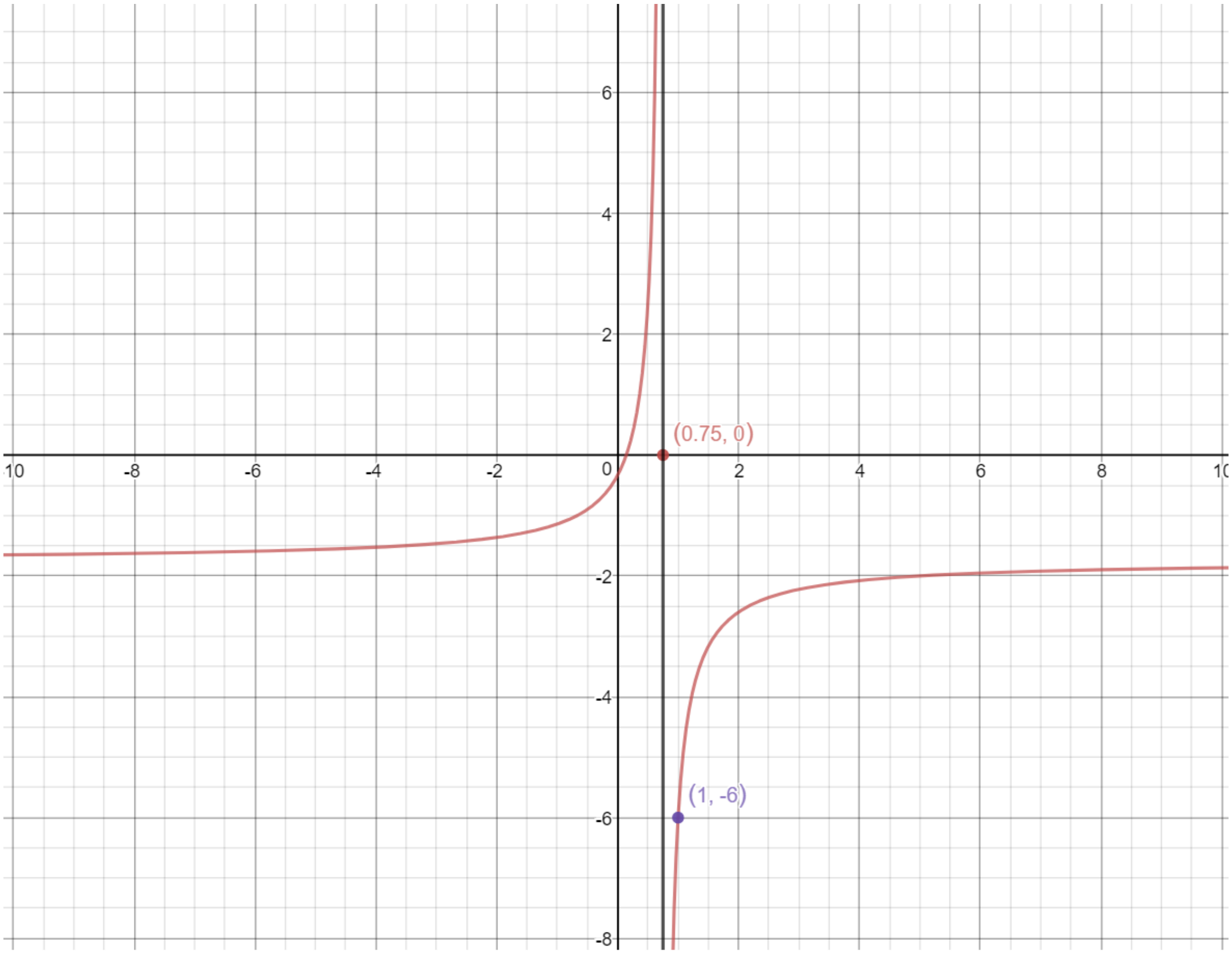
כלומר קיבלנו תנאי על דלתא: $0<\delta<\frac{1}{4}$. כל דלתא בתחום זה יהיה טוב.

אז נבחר למשל $\delta=\frac{1}{8}$ ונחזור לתרגיל:

$$17\frac{|x-1|}{|4x-3|}<17\frac{|x-1|}{\frac{1}{2}}=34|x-1|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{34}$$

אזי נבחר $\delta=\min\left\{\frac{1}{8},\frac{\varepsilon}{34}\right\}$ ואז לכל $0<|x-1|<\delta$ יתקיים: $\left|\frac{1-7x}{4x-3}+6\right|<\varepsilon$.

מ.ש.ל


(0.75, 0)
(1, -6)
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10

שאלה מספר 7 – הגדרת הגבול

הוכח לפי הגדרת הגבול כי: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x}{1+\sin x}=1$

פתרון

יהי $\varepsilon>0$. צריך למצוא $\delta>0$ כך שלכל $0<|x|<\delta$ יתקיים: $\left|\dfrac{1-x}{1+\sin x}-1\right|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{1-x}{1+\sin x}-1\right|=\left|\frac{1-x-1-\sin x}{1+\sin x}\right|=\left|\frac{-x-\sin x}{1+\sin x}\right|=\left|\frac{x+\sin x}{1+\sin x}\right|\overset{t.i\,\triangle}{\leq}$$

$$\leq\frac{|x|+|\sin x|}{|1+\sin x|}\overset{\forall x:\,|\sin x|\leq|x|}{\leq}\frac{|x|+|x|}{|1+\sin x|}=\frac{2|x|}{|1+\sin x|}$$

נעריך את הביטוי $|1+\sin x|$ באמצעות הביטוי $|x|$, נניח ש- $|x|<\dfrac{\pi}{6}$, כלומר:

$$-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)<\sin x<\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$-\frac{1}{2}<\sin x<\frac{1}{2}\quad /+1$$

$$\frac{1}{2}<1+\sin x<\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}<|1+\sin x|<\frac{3}{2}$$

נחזור לתרגיל:

$$\frac{2|x|}{|1+\sin x|}<\frac{2|x|}{\frac{1}{2}}=4|x|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x|<\frac{\varepsilon}{4}$$

אזי נבחר $\delta=\min\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$ ואז לכל $0<|x|<\delta$ יתקיים: $\left|\dfrac{1-x}{1+\sin x}-1\right|<\varepsilon$. מ.ש.ל

שאלה מספר 8 – הגדרת הגבול

א) צטט את הגדרת הגבול לפונקציה המקיימת: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$, כך ש- L קיים וסופי.

ב) הוכח לפי הגדרת הגבול כי: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x}=\frac{3}{2}$

פתרון סעיף א'

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L \Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$, קיים x_0 כך שלכל $x>x_0$: $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$.

פתרון סעיף ב'

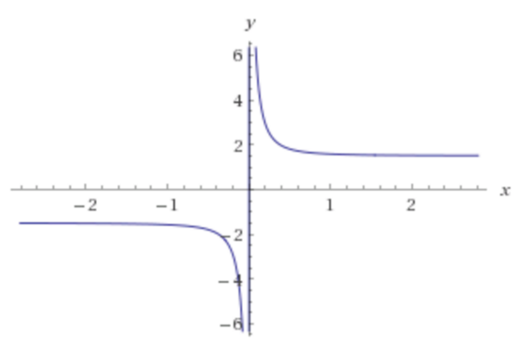
יהי $\varepsilon>0$. צריך למצוא x_0 כך שהחל ממנו והלאה יתקיים: $\left|\frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$

$$\left|\frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{\sqrt{9x^2+1}-3x}{2x}\right|=\left|\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{2x\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}\right|=$$

$$=\left|\frac{9x^2+1-9x^2}{2x\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}\right|=\frac{1}{2|x|\underbrace{\left|\sqrt{9x^2+1}+3x\right|}_{>0}}<\frac{1}{2|x|}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x|>\frac{1}{2\varepsilon}\ \overset{x\to\infty}{\Rightarrow}\ x>\frac{1}{2\varepsilon}$$

אזי נבחר $x_0=\frac{1}{2\varepsilon}$ ואז לכל $x>x_0$ מתקיים: $\left|\frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$. מ.ש.ל.



שאלה מספר 9 – הגדרת הגבול

א) צטט את הגדרת הגבול לפונקציה המקיימת: $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\infty$.

ב) הוכח לפי הגדרת הגבול כי: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x}{\left(1+x\right)^2}=\infty$

פתרון סעיף א'

$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\infty$ $\Leftrightarrow$ לכל $M>0$, קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<\left|x-x_0\right|<\delta$,
מתקיים: $f\left(x\right)>M$.

פתרון סעיף ב'

יהי $M>0$. צריך למצוא $\delta>0$ כך שלכל $0<\left|x+1\right|<\delta$: $\dfrac{1-x}{\left(x+1\right)^2}>M$

נעריך את $\left(1-x\right)$ באמצעות $\left|x+1\right|$, נבחר $\delta=0.1$, אזי:

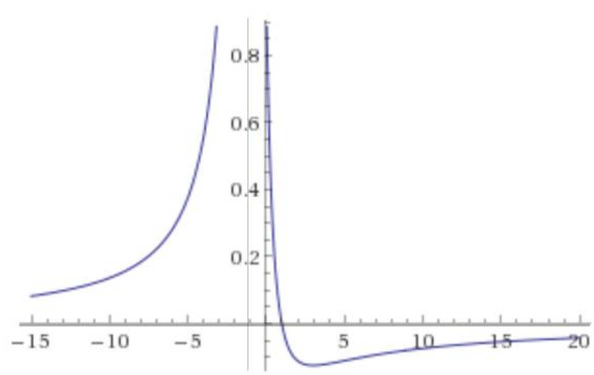
$$\left|x+1\right|<0.1$$
$$-1-0.1<x<-1+0.1$$
$$-1.1<x<-0.9 \quad /\times\left(-1\right)$$
$$0.9<-x<1.1 \quad /+1$$
$$1.9<\left(1-x\right)<2.1$$

זאת-אומרת ש-

$$\frac{1-x}{\left(x+1\right)^2}>\frac{1.9}{\left(x+1\right)^2}>M$$
$$\Rightarrow\left(x+1\right)^2<\frac{1.9}{M}$$
$$\Rightarrow\left|x+1\right|<\sqrt{\frac{1.9}{M}}$$

plot	$\frac{1-x}{(1+x)^2}$	$x = -15$ to 20

Plot:



אזי נבחר $\delta=\min\left\{0.1,\sqrt{\dfrac{1.9}{M}}\right\}$ ואז לכל $0<\left|x+1\right|<\delta$ יתקיים: $\dfrac{1-x}{\left(x+1\right)^2}>M$. מ.ש.ל

רציפות וגזירות

שאלה מספר 10 – הערך השלם

נתונה הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=\begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right] & , x\neq 0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$

בדוק האם הטענות הבאות נכונות או לא נכונות, נמק את תשובותיך:

א) לפונקציה יש נקודת אי-רציפות ב- $x=0$.

ב) הפונקציה רציפה ב- $x=1$.

ג) הפונקציה רציפה ב- $x=2$.

ד) לפונקציה יש נקודת אי-רציפות עיקרית.

ה) $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty$.

<u>בדיקת טענה א'</u>

נעזר בתכונת ערך השלם: $x-1<\left[x\right]\leq x \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}$

נרצה לכפול את אגפי אי-השוויון ב- x (כדי להגיע לפונקציה המקורית $f\left(x\right)=x\left[\frac{1}{x}\right]$), לכן נפריד לשני מקרים: x חיובי ו- x שלילי.

נתחיל מהמקרה החיובי: <u>$x>0$</u>: $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x} \quad /\cdot x$

$x>0$ לכן סימני אי-השוויון נשמרים. נשאיף את $x\to 0^+$ ונשתמש במשפט הסנדביץ':

$$\underset{\to 1}{1-x}<\underset{\to 1}{x\left[\frac{1}{x}\right]}\leq\underset{\to 1}{1}$$

מכאן: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

כעת המקרה השלילי: $\underline{x<0}$: $\qquad \frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x} \quad / \cdot x$

$x<0$ לכן סימני אי-השוויון מתחלפים. נשאיף את $x\to 0^-$ ונשתמש במשפט הסנדביץ':

$$\underset{\to 1}{1-x} > \underset{\to 1}{x\left[\frac{1}{x}\right]} \ge \underset{\to 1}{1}$$

מכאן: $$\lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

בסך הכל קיבלנו: $$\lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

לכן לפי המשפט על גבולות חד-צדדיים שווים מתקיים שגם: $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

ומכיוון שנתון ש- $f(0)=1$ יוצא ש- f רציפה שם. לכן הטענה <u>לא</u> נכונה.

<u>בדיקת טענה ב'</u>

נחשב גבולות חד-צדדיים:

$$\lim_{x\to 1^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 1^+}(x\cdot 0)=0$$

$$\lim_{x\to 1^-} x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 1^-}(x\cdot 1)=1$$

כלומר אי-רציפות מסוג ראשון – קפיצה. לכן הטענה <u>לא</u> נכונה.

<u>בדיקת טענה ג'</u>

נחשב את הגבול ישירות:

$$\lim_{x\to 2} x\left[\frac{1}{x}\right]=2\cdot\left[\frac{1}{2}\right]=2\cdot 0=0=f(2)$$

לכן f רציפה שם **ולכן הטענה נכונה**.

<u>בדיקת טענה ד'</u>

באופן כללי עבור x-ים לא שלמים f רציפה ועבור x-ים שלמים מתקבל רציפות או אי-רציפות מסוג קפיצה, אבל בכל מקרה הגבולות החד-צדדיים לכל מספר שלם סופיים וקיימים לכן לא קיימת אי-רציפות מסוג שני. לכן טענה זו <u>לא</u> נכונה.

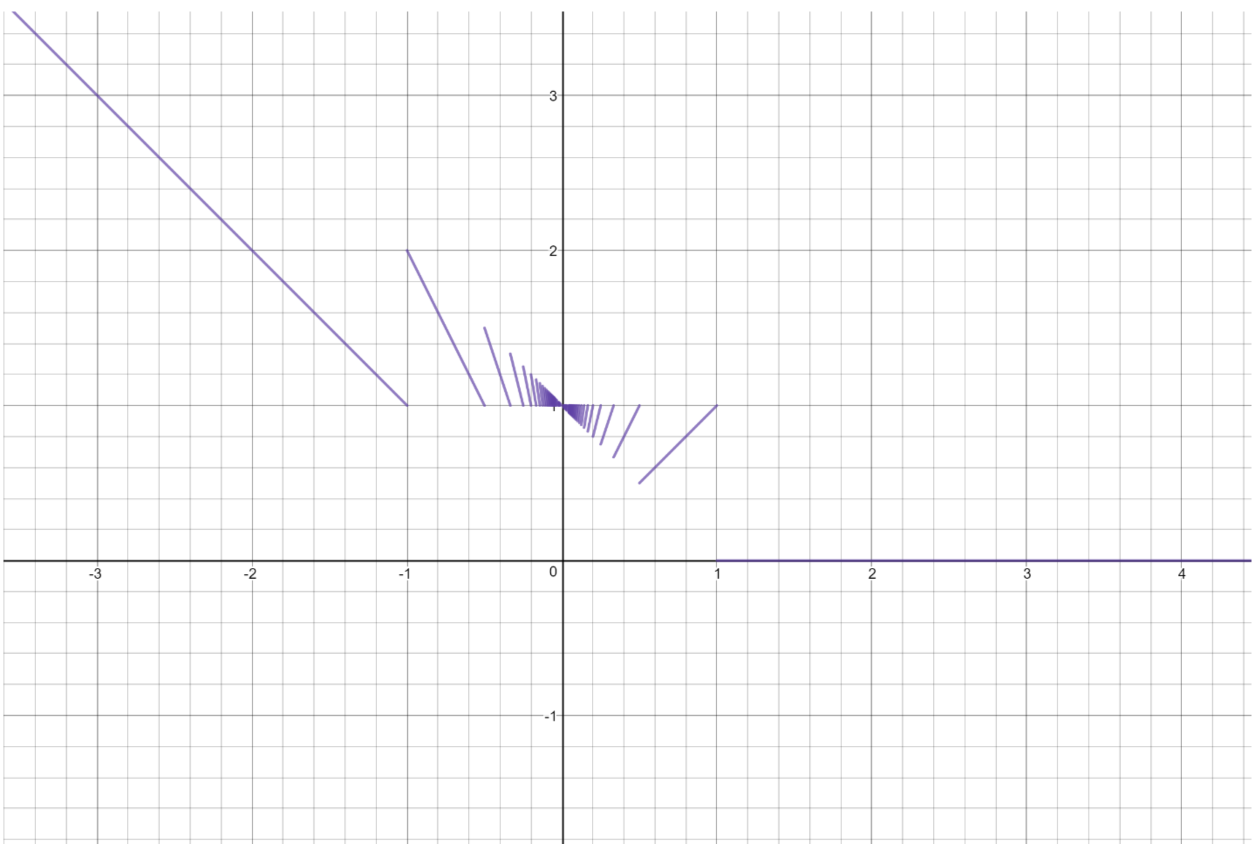
<u>בדיקת טענה ה'</u>

נשים-לב כי כאשר $x\to\infty$, אזי הערך השלם שווה **זהותית** לאפס: $\left[\frac{1}{x}\right]\equiv 0$, לכן בחישוב הגבול:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot 0\right)=0$$

לכן טענה זו <u>לא</u> נכונה.

גרף הפונקציה $f\left(x\right)=x\left[\frac{1}{x}\right]$:



שאלה מספר 11 – גזירות וחסימות בנקודה

הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

א) אם $f(x)$ גזירה ב- $x=0$ אזי גם $|f(x)|$ גזירה ב- $x=0$.

ב) אם $|f(x)|$ גזירה ב- $x=0$ אזי גם $f(x)$ גזירה ב- $x=0$.

ג) אם $f(x)$ גזירה ב- $x=1$ אזי קיימת סביבה נקובה של $x=1$ שבה $f(x)$ חסומה.

ד) אם $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ רציפה ומונוטונית אזי f גזירה לכל $x\in\mathbb{R}$.

<u>פתרון סעיף א'</u>

<u>הטענה לא נכונה</u>, ניתן דוגמא נגדית:

$$f(x)=x \quad \Rightarrow \quad |f(x)|=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$$

אזי $f(x)$ גזירה ב- $x=0$ אבל $|f(x)|$ לא (נקודות "שפיץ" אינן גזירות).

<u>פתרון סעיף ב'</u>

<u>הטענה לא נכונה</u>, ניתן דוגמא נגדית:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad |f(x)|=1$$

אזי $|f(x)|$ גזירה ב- $x=0$ אבל $f(x)$ לא (לא רציפה שם ולכן גם לא גזירה).

<u>פתרון סעיף ג'</u>

<u>הטענה נכונה</u>, נוכיח לפי משפטים:

נתון כי $f\left(x\right)$ גזירה ב- $x=1$ לכן לפי משפט $f\left(x\right)$ גם רציפה ב- $x=1$.

אם $f\left(x\right)$ רציפה ב- 1 אזי לפי הגדרת הרציפות $f\left(1\right)$ $\lim_{x\to 1} f\left(x\right)=$ כלומר היא מתכנסת ב- 1 לגבול סופי. אם היא מתכנסת ב- 1 לגבול סופי אזי לפי משפט קיימת סביבה נקובה של $x=1$ שבה $f\left(x\right)$ חסומה.

מ.ש.ל

<u>פתרון סעיף ד'</u>

<u>הטענה לא נכונה</u>, נקודות "שפיץ" אינן גזירות (כמו למשל ש- $\left|x\right|$ לא גזירה ב- 0 כי הנגזרות הח"צ לא שוות), ניתן דוגמא נגדית:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x & x<0 \\ 2x & x\ge 0 \end{cases}$$

אזי f רציפה ומונוטונית בכל $\mathbb{R}$ אבל לא גזירה ב- 0.

שאלה מספר 12 – הקשר בין זוגיות לגזירות

נתונות שתי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות ורציפות בכל $\mathbb{R}$.

נתון גם ש- $f(x)$ גזירה לכל x ב- $\mathbb{R}$. הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

א) אם $g(x)$ זוגית אזי $g(x)$ גזירה.

ב) אם $f'(x)$ זוגית אזי $f(x)$ אי-זוגית.

ג) אם $f(x)$ אי-זוגית אזי $f'(x)$ זוגית.

ד) אם $f(x)$ זוגית אזי $f'(x)$ אי-זוגית.

פתרון סעיף א'

הטענה לא נכונה, ניתן דוגמא נגדית:

$g(x)=|x|$ מוגדרת ורציפה בכל $\mathbb{R}$ אבל לא גזירה ב- $x=0$.

פתרון סעיף ב'

הטענה לא נכונה, ניתן דוגמא נגדית:

ניקח $f(x)=x+1$ אזי נגזרתה היא: $f'(x)=1$.

אזי $f'(x)$ זוגית אבל $f(x)$ לא זוגית ולא אי-זוגית.

פתרון סעיף ג'

הטענה נכונה, נוכיח:

דרך ראשונה – לפי הגדרה

נתון כי f אי-זוגית לכן:

$$f(-x)=-f(x)$$
$$f(-x+h)=f(-(x-h))=-f(x-h)$$

נתבונן בנגזרתה:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}\overset{f\ odd}{=}\lim_{h\to 0}\frac{-f(x-h)+f(x)}{h}$$

נציב: $k=-h$, אזי כאשר $h\to 0$ גם $k\to 0$ ונקבל:

$$\lim_{h\to 0}\frac{-f\left(x-h\right)+f\left(x\right)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{-f\left(x+k\right)+f\left(x\right)}{-k}=$$
$$\lim_{k\to 0}\frac{f\left(x+k\right)-f\left(x\right)}{k}=f\,'\left(x\right)$$

כלומר קיבלנו כי $f\,'\left(-x\right)=f\,'\left(x\right)$ ולכן $f\,'$ פונקציה זוגית.

מ.ש.ל

<u>דרך שנייה – לפי כלל השרשרת</u>

נתון ש- f א"ז, לכן:

$$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$$
$$\Rightarrow f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$$

כעת נגזור בשימוש בנגזרת של פונקציה מורכבת (כלל השרשרת):

$$f\,'\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]'=\left[-f\left(-x\right)\right]'=-f\,'\left(-x\right)\left(-1\right)=f\,'\left(-x\right)$$
$$\Rightarrow f\,'\left(x\right)=f\,'\left(-x\right)$$

כלומר $f\,'$ זוגית.

מ.ש.ל

<u>פתרון סעיף ד'</u>

הטענה <u>נכונה</u>, נוכיח, נתון ש- f זוגית, לכן:

$$f\left(x\right)=f\left(-x\right)$$

כעת נגזור בשימוש בנגזרת של פונקציה מורכבת (כלל השרשרת):

$$f\,'\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]'=\left[f\left(-x\right)\right]'=f\,'\left(-x\right)\left(-1\right)=-f\,'\left(-x\right)$$
$$\Rightarrow f\,'\left(x\right)=-f\,'\left(-x\right)$$

כלומר $f\,'$ אי-זוגית.

מ.ש.ל

שאלה מספר 13 – נקודות אי-רציפות ואסימפטוטות

נתונה הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=\left|x\right|e^{-\frac{1}{x}}$

א) מצא ומיין את כל נקודות אי-הרציפות של $f\left(x\right)$.

ב) מצא את כל האסימפטוטות של $f\left(x\right)$.

מגדירים פונקציה $g\left(x\right)=\dfrac{1}{1+f\left(x\right)}$.

ג) הוכח/הפרך – סוג נקודות אי-הרציפות נשמר (עיקרית, קפיצה או סליקה)

פתרון סעיף א'

נקודה חשודה לאי-רציפות היא $x=0$ כיוון ש- $\dfrac{1}{x}$ לא מוגדרת שם. נבדוק:

$$\lim_{x\to0^+}\left|x\right|e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\underbrace{\left(x\right)}_{\to0}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{\sim"e^{-\infty}"\to0}=0$$

$$\lim_{x\to0^-}\left|x\right|e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^-}\left(-x\right)e^{-\frac{1}{x}}\overset{\sim0\cdot"e^{\infty}"\sim0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x}}\overset{\sim\frac{\infty}{-\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cancel{\left(\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{\left(\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{x}}=\infty$$

כלומר קיבלנו אי-רציפות עיקרית ב- $x=0$.

פתרון סעיף ב'

<u>אסימפטוטה אנכית</u>: ל- $f\left(x\right)$ יש אסימפטוטה אנכית משמאל ב- $x=0$.

<u>אסימפטוטה משופעת ב- ∞</u>

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|x\right|e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}e^{-\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{1}{x}}=e^{0}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-ax\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left|x\right|e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\left(\overset{\to1}{e^{-\frac{1}{x}}}-1\right)\right)\overset{\sim\infty\cdot0}{=}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\overset{\sim\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{\left(\frac{1}{x^2}\right)}e^{-\frac{1}{x}}}{-\cancel{\left(\frac{1}{x^2}\right)}}=-\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{1}{x}}=-1$$

$$\Rightarrow a=1\ ,\ b=-1\ \Rightarrow\ y=x-1$$

כלומר הישר $y=x-1$ הוא אסימפטוטה משופעת של $f(x)$ ב- ∞.

<u>אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$</u>

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\cancel{x}e^{-\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=-\lim_{x\to-\infty}e^{-\frac{1}{x}}=-e^{0}=-1$$

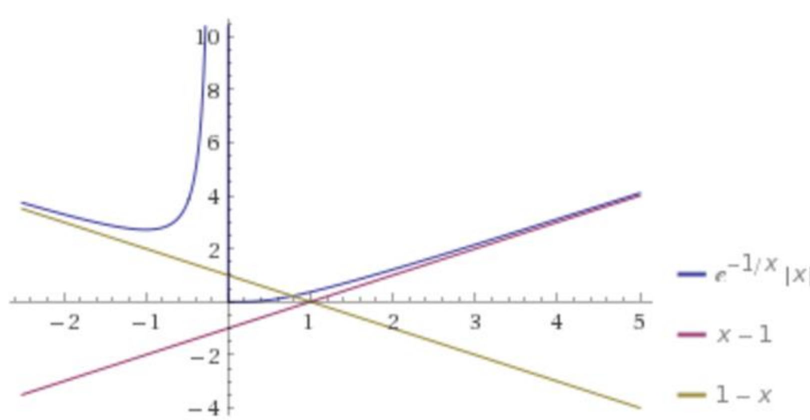
$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|e^{-\frac{1}{x}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(1-\overbrace{e^{-\frac{1}{x}}}^{\to1}\right)\right)\overset{\sim-\infty\cdot0}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{\sim\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{-\left(\frac{1}{x^2}\right)}e^{-\frac{1}{x}}}{\cancel{-\left(\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}e^{-\frac{1}{x}}=1$$

$$\Rightarrow a=-1\ ,\ b=1\ \Rightarrow\ y=-x+1$$

כלומר הישר $y=-x+1$ הוא אסימפטוטה משופעת של $f(x)$ ב- $-\infty$.

Plot:



פתרון סעיף ג'

התקבלה הפונקציה: $g\left(x\right)=\dfrac{1}{1+\left|x\right|e^{-\frac{1}{x}}}$

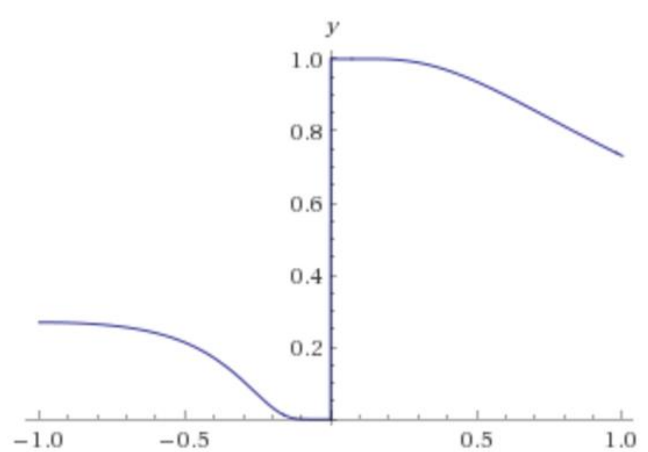
נשים-לב שהמכנה של $g\left(x\right)$ לא יכול להתאפס לכל $x\neq 0$ כי $1+\underbrace{\left|x\right|e^{-\frac{1}{x}}}_{>0}>1>0$, לכן נקודת אי-הרציפות החשודה היחידה של $g\left(x\right)$ עדיין ב- $x=0$, נבדוק אם היא שינתה את סוגה, נעזר בחישובים שעשינו בסעיף א':

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\underbrace{\left|x\right|e^{-\frac{1}{x}}}_{\to 0}}=1 \quad , \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+\underbrace{\left|x\right|e^{-\frac{1}{x}}}_{\to\infty}}=0$$

כלומר קיבלנו נקודת אי-רציפות קפיצה ב- $x=0$, זאת-אומרת שהטענה לא נכונה מכיוון שנקודת אי-הרציפות שינתה את סוגה מעיקרית לקפיצה.

plot	$\dfrac{1}{1+\lvert x\rvert\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}$

Plots:



שאלה מספר 14 – הגדרת הרציפות

נתונה הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & ,x\neq 0\\ m & ,x=0\end{cases}$

א) חשב את הערך של m כך ש- $f\left(x\right)$ תהיה רציפה ב- $x=0$.

ב) עבור ערך m שמצאת בסעיף א', בדוק האם $f'\left(x\right)$ רציפה ב- $x=0$.

<u>פתרון סעיף א'</u>

לרציפות $f\left(x\right)$ ב- $x=0$ נדרוש: $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=f\left(0\right)=m$

$$\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{\sim\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\overset{\sim\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

<u>פתרון סעיף ב'</u>

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & ,x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & ,x=0\end{cases}$$

יש לבדוק האם הנגזרת רציפה ב- $x=0$, כלומר האם מתקיים: $\lim\limits_{x\to 0} f'\left(x\right)=f'\left(0\right)$?

את אגף שמאל ($f'\left(x\right)$) מחשבים לפי גזירה ישירה <u>לפי כללי גזירה</u> (לכל $x\neq 0$),

את אגף ימין ($f'\left(0\right)$) מחשבים <u>לפי הגדרת הנגזרת</u> (מכיוון שאין אנו יודעים אם f גזירה ב- $x=0$).

נתחיל מאגף שמאל, נגזור את f ישירות לכל $x\neq 0$ לפי כללי גזירה:

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}\quad,\quad x\neq 0$$

$$f'(x)=\frac{x^{\cancel{2}}\sin x-2\cancel{x}(1-\cos x)}{x^{\cancel{4}\,3}}\overset{x\neq 0}{=}\frac{x\sin x-2(1-\cos x)}{x^3}=\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^3}$$

נמשיך לאגף ימין, נחשב את הביטוי לפי הגדרה: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x^2}{2x^3}\overset{\sim\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2x}{6x^2}\overset{\sim\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2}{12x}\overset{\sim\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x}{12}=0$$

$$f'(0)=0$$

בינתיים בסך הכל קיבלנו: $f'(x)=\begin{cases}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^3} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

כעת נבדוק האם מתקיים $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)\overset{?}{=}f'(0)=0$. נחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^3}\overset{\sim\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x-2\sin x}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{3x^2}\overset{\sim\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{6x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6}=0$$

קיבלנו $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ ולכן הנגזרת רציפה ב- $x=0$.

שאלה מספר 15 – מיון נקודות אי-רציפות כתלות בפרמטר

נתון מספר n טבעי ונתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$

א) עבור אילו ערכים של n, $f(x)$ רציפה ב- $x=0$?

ב) עבור אילו ערכים של n, $f'(x)$ רציפה ב- $x=0$?

פתרון סעיף א'

לרציפות $f(x)$ ב- $x=0$ רוצים: $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\underbrace{x^n}_{\to 0}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{bounded}=0$$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ חסומה, x^n שואף לאפס לכל n טבעי ($n=\{1,2,3,...\}$) ולכן $f(x)$ רציפה לכל $n\in\mathbb{N}$.

פתרון סעיף ב'

כעת יש לבדוק האם הנגזרת רציפה ב- $x=0$, כלומר האם מתקיים: $\lim_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0$?

אגף ימין

לחישוב $f'(0)$ נעזר בהגדרה:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

אם $n>1$ אזי $n-1>0$ ואז: $\lim_{x\to 0}\underbrace{x^{n-1}}_{\to 0}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{bounded}=0$

אם $n=1$ נקבל: $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ אבל הגבול לא קיים.

אז לכל $n\geq 2$ $f'(0)=0$, כלומר $f(x)$ גזירה ב- $x=0$ לכל $n\geq 2$.

אגף שמאל

לחישוב $f'(x)$ נגזור לפי כללי גזירה. נגזור לכל $x\neq 0$ (נזכור כי נתון ש- n הוא מספר טבעי, כלומר $n\geq 1$ ושלם):

$$f(x)=x^n\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x)=nx^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^n\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)=nx^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

מהסעיף הקודם ראינו כי $f'(0)=0$ לכל $n\geq 2$, כלומר ניתן לרשום:

$$f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & ,x\neq 0\ ,\ n\geq 2 \\ 0 & ,x=0\ ,\ n\geq 2 \end{cases}$$

כעת יש לבדוק האם הנגזרת רציפה ב- $x=0$, כלומר האם מתקיים: $\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=0$?

נחשב: $$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(nx^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

הביטוי הראשון $\lim_{x\to 0}nx^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ שואף ל- 0 לכל $n-1>0$, כלומר לכל $n>1 \Leftarrow n\geq 2$

הביטוי השני $\lim_{x\to 0}x^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ שואף ל- 0 לכל $n-2>0$, כלומר לכל $n>2 \Leftarrow n\geq 3$

לכן אם רוצים שהגבול כולו יהיה קיים נדרוש $n\geq 3$, ואז $\lim_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0)$, כלומר $f'(x)$ רציפה ב- $x=0$ לכל $n\geq 3$.

שאלה מספר 16 – הגדרת הרציפות

נתונה הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=\begin{cases} x^4\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$

א) בדוק האם $f\left(x\right)$ רציפה ב- $x=0$.

ב) חשב את $f'\left(x\right)$ ובדוק האם היא רציפה ב- $x=0$.

ג) חשב את $f''\left(x\right)$ ובדוק האם היא רציפה ב- $x=0$.

<u>פתרון סעיף א'</u>

נבדוק רציפות f ב- 0, כלומר האם מתקיים $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)\overset{?}{=}f\left(0\right)$:

$$\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0}\underbrace{x^4}_{\to 0}\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{bounded}=0=f\left(0\right)$$

לכן $f\left(x\right)$ רציפה ב- $x=0$.

<u>פתרון סעיף ב'</u>

נגזור לכל $x\neq 0$:

$$f'(x)=\left(x^4\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=4x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x^{\cancel{4}\,2}\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)=$$

$$f'(x)=4x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\qquad ,x\neq 0$$

נבדוק רציפות f' ב- 0, כלומר האם מתקיים $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)\overset{?}{=}f'(0)$:

נחשב את $f'(0)$ לפי ההגדרה:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\underset{\to 0}{x^3}\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{bounded}=0$$

בסך הכל קיבלנו:

$$f'(x)=\begin{cases}4x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

כעת נחשב את $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ לכל $x\neq 0$:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\underset{\to 0}{4x^3}\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{bounded}+\underset{\to 0}{x^2}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{bounded}\right)=0$$

וראינו כי $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0$ לכן $f'(x)$ רציפה ב- $x=0$.

<u>פתרון סעיף ג'</u>

נגזור לכל $x\neq 0$:

$$f'(x)=4x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f''(x)=12x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+4x^{\cancel{3}1}\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cancel{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)=$$

$$f''(x)=12x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+6x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

נבדוק רציפות f'' ב- 0, כלומר האם מתקיים $\lim_{x\to 0} f''(x) \overset{?}{=} f''(0)$:

נחשב את $f''(0)$ לפי ההגדרה:

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\underset{\to 0}{4x^2}\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{bounded}+\underset{\to 0}{x}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{bounded}=0$$

בסך הכל קיבלנו:

$$f''(x)=\begin{cases}12x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+6x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right) & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

כעת נחשב את $\lim_{x\to 0} f''(x)$ לכל $x\neq 0$:

$$\lim_{x\to 0} f''(x)=\lim_{x\to 0}\left(12x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+6x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

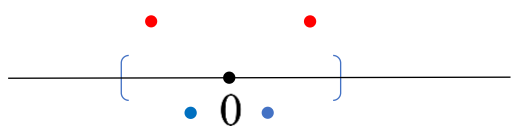
כאשר הגבול של שני המחוברים הראשונים שווה ל- 0 לפי פונקציה חסומה כפול פונקציה ששואפת ל- 0 אבל הגבול של $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ כלל לא קיים! כלומר $\lim_{x\to 0} f''(x)$ לא קיים, לכן ל- $f''(x)$ יש אי-רציפות עיקרית ב- $x=0$.

הערה

קיבלנו כי $f\left(x\right)$ גזירה פעמיים ב- $x=0$ ו- $f'\left(0\right)=0$, כלומר $x=0$ נקודה חשודה לקיצון.

לפי ההגדרה, x_0 נקראת נקודת מקסימום (מינימום) מקומית של $f\left(x\right)$ אם קיימת סביבה של x_0 כך ש- $f\left(x\right)\le f\left(x_0\right)$ ($f\left(x\right)\ge f\left(x_0\right)$) לכל x השייך לסביבה זו.

$f\left(x\right)=x^4\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ היא פונקציה זוגית, בכל סביבה קטנה ככל שתהיה סביב $x=0$ תמיד נוכל למצוא באופן סימטרי זוג ערכים חיוביים או זוג ערכים שליליים של הפונקציה, כלומר לא קיימת סביבה שבה $f\left(0\right)\ge f\left(x\right)$ או $f\left(0\right)\le f\left(x\right)$ <u>לכל</u> x השייך לסביבה זו. לכן אין נקודת קיצון ב- $x=0$.



באותו האופן גם $f''\left(x\right)=12x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+6x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ פונקציה זוגית, לכל זוג ערכים חיובי ושלילי שנבחר סביב $x=0$ נקבל כי $f''\left(x\right)>0$ לשניהם או $f''\left(x\right)<0$ לשניהם, כלומר אין חילוף תחומי קעירות-קמירות ברור סביב $x=0$, לכן אין נקודת פיתול ב- $x=0$.

לסיכום, קיבלנו כי $f\left(x\right)$ גזירה פעמיים ב- $x=0$ ו- $f'\left(0\right)=0$, אבל $x=0$ לא נקודת קיצון ולא נקודת פיתול.

<u>שאלה מספר 17 – נקודות קיצון ונקודות פיתול</u>

הוכח / הפרך את הטענות הבאות:

א) אם x_0 נקודה <u>חשודה לקיצון</u>, אזי או ש- x_0 נקודת קיצון או ש- x_0 נקודת פיתול.

אם בנקודה x_0 הפונקציה f גזירה פעמיים, $f'(x_0)=0$ ו- x_0 <u>אינה</u> נקודת קיצון מקומית, אזי בנקודה זו יש פיתול.

ב) אם בנקודה x_0 הפונקציה f גזירה פעמיים ו- $f'(x_0)=0$ אזי בנקודה זו יש פיתול.

ג) אם בנקודה x_0 הפונקציה f גזירה פעמיים ו- $f''(x_0)=0$ אזי בנקודה זו יש פיתול.

ד) אם בנקודה x_0 הפונקציה f גזירה פעמיים, $f'(x_0)=0$ ו- $f''(x_0)\neq 0$, אזי x_0 נקודת קיצון מקומית.

ה) לפולינום ממעלה 3 בהכרח יש נקודת פיתול יחידה.

<u>פתרון סעיף א'</u>

לא נכון, דוגמא נגדית $f(x)=x^4\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. הפונקציה גזירה פעמיים וראינו כי $f'(0)=0$ (כלומר $x_0=0$ נקודה חשודה לקיצון), אבל $x=0$ <u>לא</u> נקודת קיצון מקומית <u>ולא</u> נקודת פיתול.

<u>פתרון סעיף ב'</u>

לא נכון, דוגמא נגדית $f(x)=x^2$. אזי היא גזירה פעמיים ו- $f'(0)=2x\big|_{x=0}=0$ אבל ב- $x=0$ יש רק מינימום ואין פיתול.

<u>פתרון סעיף ג'</u>

לא נכון, דוגמא נגדית $f(x)=x^4$. אזי היא גזירה פעמיים ו- $f''(0)=12x^2\big|_{x=0}=0$ אבל ב- $x=0$ יש רק מינימום ואין פיתול.

פתרון סעיף ד'

הטענה נכונה, זוהי בדיוק ההגדרה לנקודת קיצון לפי מבחן הנגזרת השנייה. נראה זאת:

נתון ש- $f'(x_0)=0$ לכן הנקודה x_0 חשודה לקיצון.

נתון ש- $f''(x_0)\neq 0$ ולכן לפי מבחן הנגזרת השנייה מתקיים כי:

אם $f''(x_0)>0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומית

ואם $f''(x_0)<0$ אזי x_0 נקודת מקסימום מקומית.

בכל מקרה x_0 נקודת קיצון מקומית.

פתרון סעיף ה'

הטענה נכונה, פולינום ממעלה 3 גזיר ורציף אינסוף פעמים בכל $\mathbb{R}$:

$$p_3(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$p_3'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$p_3''(x)=6ax+2b$$

נשווה את $p_3''(x)=0$ כדי לראות אם היא מחליפה סימן: $6ax+2b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{3a}$

קיבלנו שהנגזרת השנייה $p_3''(x)$ היא ישר לינארי המחליף סימן ב- $x=-\frac{b}{3a}$, כלומר הפונקציה המקורית $p_3(x)$ מחליפה תחומי קעירות וקמירות ב- $x=-\frac{b}{3a}$ ולכן יש שם נקודת פיתול יחידה.

שאלה מספר 18 – מיון נקודות אי-רציפות (הערך השלם)

נתונה הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=\left[x\right]\sin\left(\pi x\right)$

הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

א) $f\left(x\right)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$

ב) $f\left(x\right)$ גזירה לכל $x\in\mathbb{R}$

<u>פתרון סעיף א'</u>

<u>הטענה נכונה</u>, נוכיח:

כשרואים ערך שלם תמיד כדאי לבדוק אי-רציפות סביב הנקודות השלמות.

בנקודות הלא שלמות $f\left(x\right)$ רציפה וגזירה כמכפלה של שתי פונקציות רציפות וגזירות.

בסביבת הנקודות השלמות צריך לבדוק, כלומר בסביבת $x=k$, לכל k שלם:

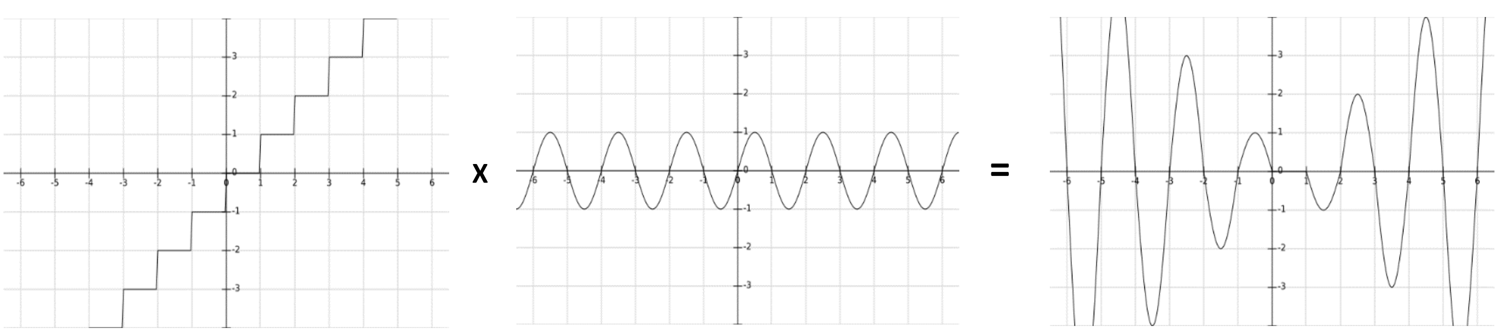
$$\lim_{x\to k^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to k^+}\left[x\right]\sin\left(\pi x\right)=\lim_{x\to k^+} x\sin\left(\pi x\right)=k\underbrace{\sin\left(\pi k\right)}_{\equiv 0}=0$$

$$\lim_{x\to k^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to k^-}\left[x\right]\sin\left(\pi x\right)=\lim_{x\to k^-}\left(x-1\right)\sin\left(\pi x\right)=\left(k-1\right)\underbrace{\sin\left(\pi k\right)}_{\equiv 0}=0$$

כעת נחשב את ערך הפונקציה ב- $x=k$ כדי להבחין בין רציפות לאי-רציפות סליקה:

$$f\left(k\right)=\left[k\right]\underbrace{\sin\left(\pi k\right)}_{\equiv 0}=0$$

כלומר $f\left(x\right)$ רציפה בנקודות השלמות וגם בלא שלמות ולכן <u>רציפה</u> לכל $x\in\mathbb{R}$.



<u>הערה</u>: בגרף הערך השלם "העיגולים הריקים" הם מצד ימין של כל מדרגה, כלומר הרציפות היא מימין לכל מספר שלם.

<u>פתרון סעיף ב'</u>

<u>נשתמש במשפט והגדרה מגזירות</u>:

<u>הגדרה – נגזרות חד-צדדיות - נגזרת מימין ונגזרת משמאל</u>

לגבולות חד-צדדיים וסופיים:

$$f_+^{'}\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'\left(x\right)$$

$$f_-^{'}\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}f'\left(x\right)$$

<u>משפט</u>

פונקציה $f\left(x\right)$ גזירה ב- x_0 אמ"מ יש לה נגזרות מימין ומשמאל ב- x_0 והן שוות זו לזו.

נחזור לתרגיל, <u>הטענה לא נכונה</u>, נראה זאת:

כפי שאמרנו, בנקודות הלא שלמות $f\left(x\right)$ רציפה וגזירה כמכפלה של שתי פונקציות רציפות וגזירות.

נתבונן בפונקציה בתחום $\left(0,2\right)$:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0 & 0<x<1\\ \sin\left(\pi x\right) & 1\le x<2\end{cases}$$

והנגזרת:

$$f'\left(x\right)=\begin{cases}0 & 0<x<1\\ \pi\cos\left(\pi x\right) & 1\le x<2\end{cases}$$

נחשב את הנגזרות החד-צדדיות סביב הנקודה $x=1$:

$$f_+^{'}\left(1\right)=\lim_{x\to 1^+}f'\left(x\right)=\lim_{x\to 1^+}\pi\cos\left(\pi x\right)=-\pi$$

$$f_-^{'}\left(1\right)=\lim_{x\to 1^-}f'\left(x\right)=\lim_{x\to 1^-}0=0$$

קיבלנו כי הנגזרות החד-צדדיות לא שוות זו לזו ולכן $f\left(x\right)$ לא גזירה ב- $x=1$.

<u>הערה</u>: תכונת הערך השלם - $x-1<\left[x\right]\le x$

משפטים יסודיים

שאלה מספר 19 – משפט ווירשטראס

נתונה פונקציה f רציפה בקטע $[0,\infty)$, שמקיימת: $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$, כאשר $L>0$ מספר סופי וחיובי.

א) הוכח כי f חסומה בקטע $[0,\infty)$.

ב) נתון כי $f(0)=L-1$. הוכח/הפרך: f בהכרח מקבלת מקסימום ב- $[0,\infty)$.

פתרון סעיף א'

נתון ש- $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$, לכן לכל ε קיים x_0 כך שלכל $x>x_0$ מתקיים: $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$.

בפרט עבור $\varepsilon=1$, קיים a כך שלכל $x>a$ מתקיים: $L-1<f(x)<L+1$.

כלומר f חסומה לכל $x>a$.

f רציפה בקטע הסגור $[0,a]$ ולכן לפי משפט ווירשטראס הראשון חסומה שם, כלומר קיים $K>0$ כך ש- $|f(x)|\le K$ (כלומר: $-K\le f(x)\le K$) לכל $x\in[0,a]$.

נסמן $M=\max\{L+1,K\}$, $m=\min\{L-1,-K\}$ ואז לכל x: $m<f(x)<M$.

פתרון סעיף ב'

הטענה לא נכונה. אומנם מכיוון ש- f רציפה ניתן לחשוב שלפי ווירשטראס היא תקבל שם את הערך המינימלי (היא אכן מקבלת אותו) ואת הערך המקסימלי שלה, אך הקטע הנתון בו f רציפה אינו סגור, הוא חצי פתוח. ניתן דוגמא נגדית:

$f(x)=L-\frac{1}{x+1}$. אזי $f(0)=L-1$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ אבל זוהי פונקציה מונוטונית עולה שמתחילה ב- $L-1$ ומשם שואפת בעלייה מתמדת ל- L, לכן לעולם לא מקבלת ערך מקסימלי בקטע.

שאלה מספר 20 – משפטי ערך ביניים, וויירשטראס, רול ופרמה

נתונה פונקציה f גזירה בקטע $(0,6)$ ומקיימת: $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(3)=3 \\ f(5)=-2 \end{cases}$

נתונות ארבעת הטענות הבאות:

I. למשוואה $f(x)=0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע $(0,6)$.

II. קיימת נקודה $x_0\in(3,5)$ כך ש- $f(x_0)=-1$.

III. קיימת נקודה $c\in(0,6)$ כך ש- $f'(c)=0$.

IV. לגרף הפונקציה $f(x)$ יש משיק אופקי.

לפיכך, איזו מהטענות לעיל נכונות?

א) רק I

ב) רק I ו- II

ג) רק III ו- IV

ד) אף אחת

ה) כולן

<u>פתרון</u>

התשובה היא ה' - <u>כל הטענות נכונות</u>, נוכיח:

<u>טענה I נכונה</u>

f גזירה בכל $x_0 \in (0,6)$ ולכן גם רציפה בכל $x_0 \in (0,6)$, בפרט f רציפה ב- $[1,3],[3,5] \subset (0,6)$.

מתקיים כי $\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(3) > 0 \end{cases}$ ולכן לפי **משפט ע"ב** קיימת נקודה $x_1 \in (1,3)$ כך ש- $f(x_1) = 0$

מתקיים כי $\begin{cases} f(3) > 0 \\ f(5) < 0 \end{cases}$ ולכן לפי **משפט ע"ב** קיימת נקודה $x_2 \in (3,5)$ כך ש- $f(x_2) = 0$

<u>טענה II נכונה</u>

f רציפה ב- $[3,5]$. מכיוון ש- $\begin{cases} f(3) = 3 \\ f(5) = -2 \end{cases}$ ו- $-2 < -1 < 3$ אזי לפי **משפט ע"ב המוכלל** קיימת נקודה $x_0 \in (3,5)$ כך ש- $f(x_0) = -1$.

<u>טענה III נכונה</u>

<u>דרך ראשונה – לפי משפט ע"ב + רול</u>

בטענה I מצאנו שני שורשים $x_1, x_2 \in (0,6)$, כך ש- $f(x_1) = f(x_2)$.

f גזירה ב- $(0,6)$ ולכן גם רציפה שם, בפרט f רציפה בקטע הסגור- $[x_1, x_2]$ (שמוכל ב- $(0,6)$).

ולכן לפי **משפט רול** קיימת נקודה $c \in (x_1, x_2)$ כך ש- $f'(c) = 0$.

(<u>אלטרנטיבה</u> – להשתמש בעובדה ש- $f(x_0) = f(1) = -1$ כפי שמצאנו בטענה II).

<u>דרך שנייה – לפי משפט וויירשטראס + פרמה</u>

f גזירה ולכן רציפה בקטע הסגור $\left[1,5\right]$, לכן לפי **משפט וויירשטראס** היא מקבלת את הערך המקסימלי שלה בקטע (ביחס לשאר ערכי f שבקטע). המקסימום אינו יכול להתקבל בקצוות משום ש- $f\left(1\right), f\left(5\right) < f\left(3\right)$, לכן בהכרח יש לה מקסימום מקומי ב- $c \in \left(1,5\right)$ ולכן לפי **משפט פרמה**: $f'\left(c\right) = 0$.

<u>טענה IV נכונה</u>

מטענה III ראינו כי קיימת נקודה c בקטע כך ש- $f'\left(c\right) = 0$, לכן ל- $f\left(x\right)$ יש משיק אופקי בנקודה $\left(c, f\left(c\right)\right)$.

שאלה מספר 21 – מספר פתרונות למשוואה

מצא כמה פתרונות יש למשוואה הבאה: $x^8=1+2x$

<u>פתרון</u>

נגדיר פונקציית עזר: $h(x)=x^8-2x-1$ ונחפש את מספר השורשים הממשיים של הפונקציה.

נבחן את התנהגות הפונקציה בקצוות: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^8-2x-1\right)=\infty$

נציב לפונקציה ערכים למשל ב- $-2,0,2$:

$$h(-2)=256+4-1=259>0$$
$$h(0)=-1<0$$
$$h(2)=256-4-1=251>0$$

h רציפה לכל x כפולינום. בפרט h רציפה בקטע הסגור $[-2,0]$. כמו-כן מתקיים ש- $\begin{cases}h(-2)>0\\h(0)<0\end{cases}$ ולכן לפי **משפט ערך הביניים** קיימת נקודה $c_1\in(-2,0)$ כך ש- $h(c_1)=0$.

כמו-כן h רציפה ב- $[0,2]$ ומתקיים ש- $\begin{cases}h(0)<0\\h(2)>0\end{cases}$ ולכן לפי **משפט ערך הביניים** קיימת נקודה $c_2\in(0,2)$ כך ש- $h(c_2)=0$.

כלומר עד כה הראנו של- h יש <u>לפחות</u> שני שורשים. נעזר **במשפט רול** כדי להראות שיש לה <u>לכל היותר</u> שני שורשים ולכן בסה"כ <u>בדיוק</u> שני שורשים.

h רציפה וגזירה לכל x כפולינום, לכן לפי משפט רול בין כל שני שורשים של h יש שורש של $h'(x)=8x^7-2$. נשווה ל- 0 למציאת השורשים:

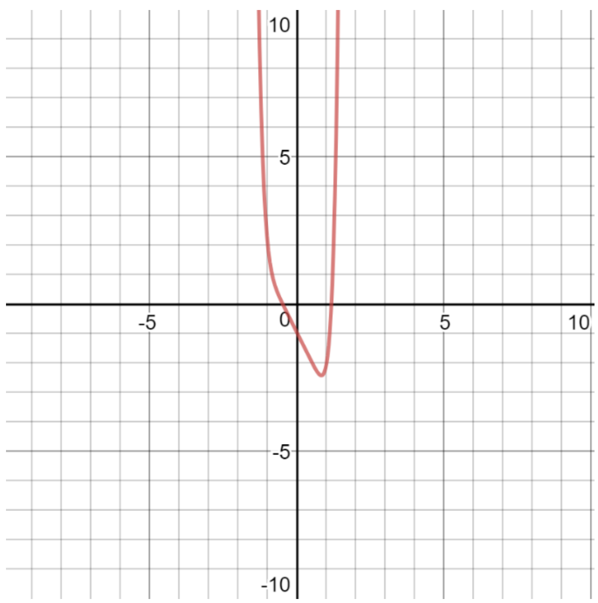
$$h'(x)=8x^7-2=0$$
$$\Rightarrow x=\sqrt[7]{\frac{1}{4}}$$

כלומר לנגזרת יש שורש ממשי יחיד!

המסקנה היא של- h יש לכל היותר שני שורשים ממשיים ולכן בסה"כ יש לה בדיוק שני שורשים ממשיים.

מ.ש.ל

גרף של $h(x)=x^8-2x-1$:



שאלה מספר 22 – מספר פתרונות למשוואה

נתונה $f\left(x\right)=\frac{x^3}{3}+x^2+5x+\cos x$. הוכח כי למשוואה $f\left(x\right)=0$ יש פתרון יחיד.

<u>פתרון</u>

צריך להראות ש- f יש שורש ממשי יחיד.

נציב שני ערכים לבדיקה:

$$f\left(1\right)=\frac{1}{3}+1+5+\cos\left(1\right)=6\frac{1}{3}+\cos\left(1\right)>0$$

$$f\left(-1\right)=-\frac{1}{3}+1-5+\cos\left(-1\right)=-4\frac{1}{3}+\cos\left(1\right)<0$$

f רציפה לכל x כסכום של פונקציות אלמנטריות רציפות בכל $\mathbb{R}$. לכן בפרט f רציפה בקטע הסגור $\left[-1,1\right]$, וכמו-כן ראינו שמתקיים:

$\begin{cases} f\left(1\right)>0 \\ f\left(-1\right)<0 \end{cases}$, לכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $c\in\left(-1,1\right)$ כך ש- $f\left(c\right)=0$.

אז עד כה הוכחנו כי ל- f יש <u>לפחות</u> שורש אחד. כעת נראה כי הוא גם יחיד.

<u>הערה:</u>

משלב זה ישנן שתי דרכים להראות שהפתרון הוא יחיד:

<u>דרך ראשונה – משפט רול</u>. נעזר במשפט רול כדי להראות שיש <u>לכל היותר</u> פתרון יחיד, ומכיוון שהראנו לפי משפט ערך-הביניים שיש <u>לפחות</u> פתרון יחיד, אזי המסקנה היא שיש <u>בדיוק</u> פתרון אחד.

<u>דרך שנייה – חד-חד-ערכיות</u>. נראה כי f חח"ע ולכן בהכרח הפתרון $f\left(x\right)=0$ מתקבל פעם אחת. שיטה זו טובה רק כאשר רוצים להוכיח שיש בדיוק פתרון אחד.

<u>דרך ראשונה – משפט רול</u>

f רציפה וגזירה לכל x כסכום של פונקציות רציפות וגזירות בכל $\mathbb{R}$, לכן לפי משפט רול בין כל שני שורשים של f יש שורש של: $f'(x)=\frac{3x^2}{3}+2x+5-\sin x$. אבל ל- f' אין שורשים כלל (נמצאת כולה מעל ציר ה- x):

$$f'(x)=\frac{3x^2}{3}+2x+5-\sin x=x^2+2x+5-\sin x\overset{\sin x\le 1}{\ge}x^2+2x+5-1=$$
$$=x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2+3>0$$

לכן בהכרח ל- f יש <u>לכל היותר</u> שורש ממשי אחד, לכן בסה"כ יש לה בדיוק שורש אחד.

מ.ש.ל דרך 1

<u>דרך שנייה – חד-חד-ערכיות</u>

f גזירה לכל x כסכום של פונקציות גזירות בכל $\mathbb{R}$, אזי נגזור:

$$f'(x)=\frac{3x^2}{3}+2x+5-\sin x=x^2+2x+5-\sin x\overset{\sin x\le 1}{\ge}x^2+2x+5-1=$$
$$=x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2+3>0$$

קיבלנו כי $f'(x)>0$, מכאן לפי מסקנות משפט לגרנז', f מונוטונית עולה ממש ולכן לפי משפט, f חד-חד-ערכית, ולכן השורש לעיל הינו יחיד.

מ.ש.ל דרך 2

שאלה מספר 23 – מספר פתרונות למשוואה

נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=x^4+x^2+\sin x$. מצא את מספר השורשים הממשיים של f .

<u>פתרון</u>

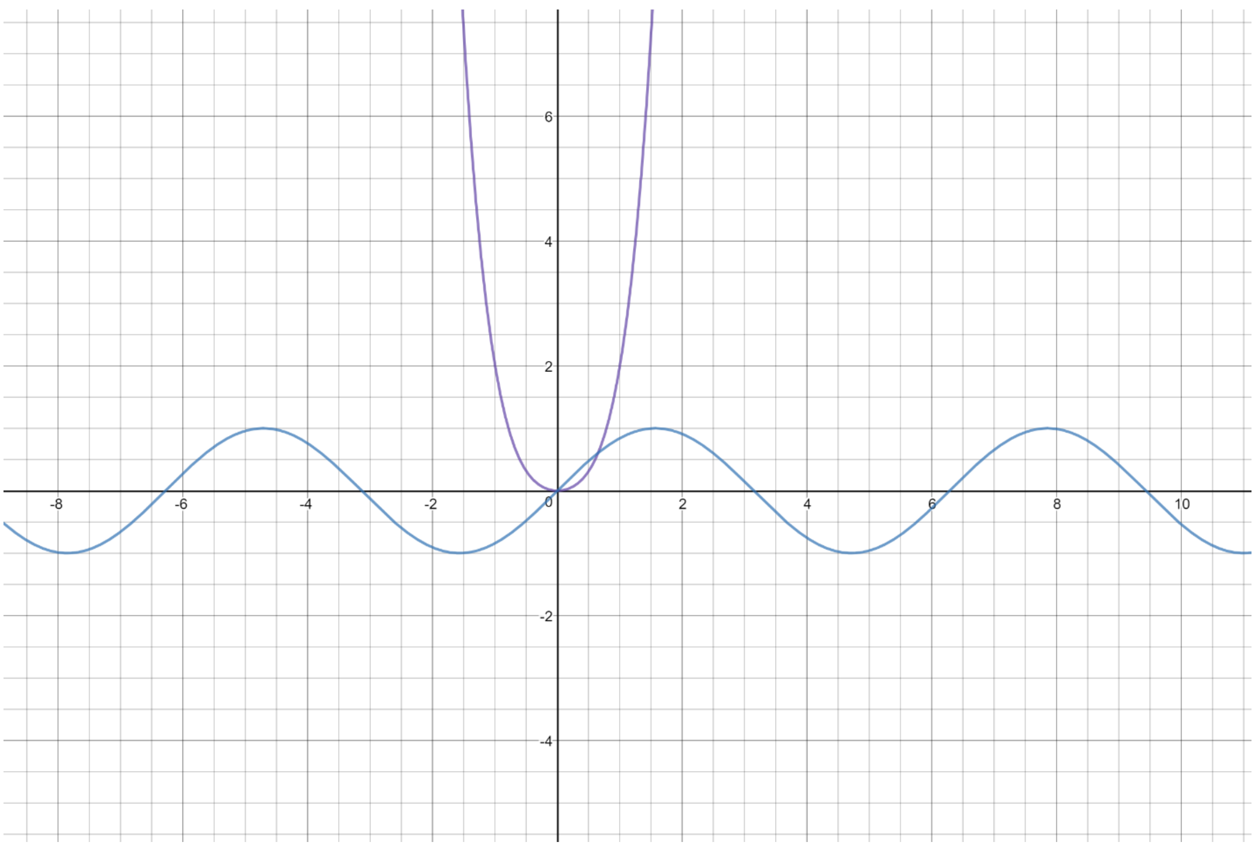
<u>הערה</u>

איך מנחשים מראש את מספר השורשים של f ? שתי דרכים:

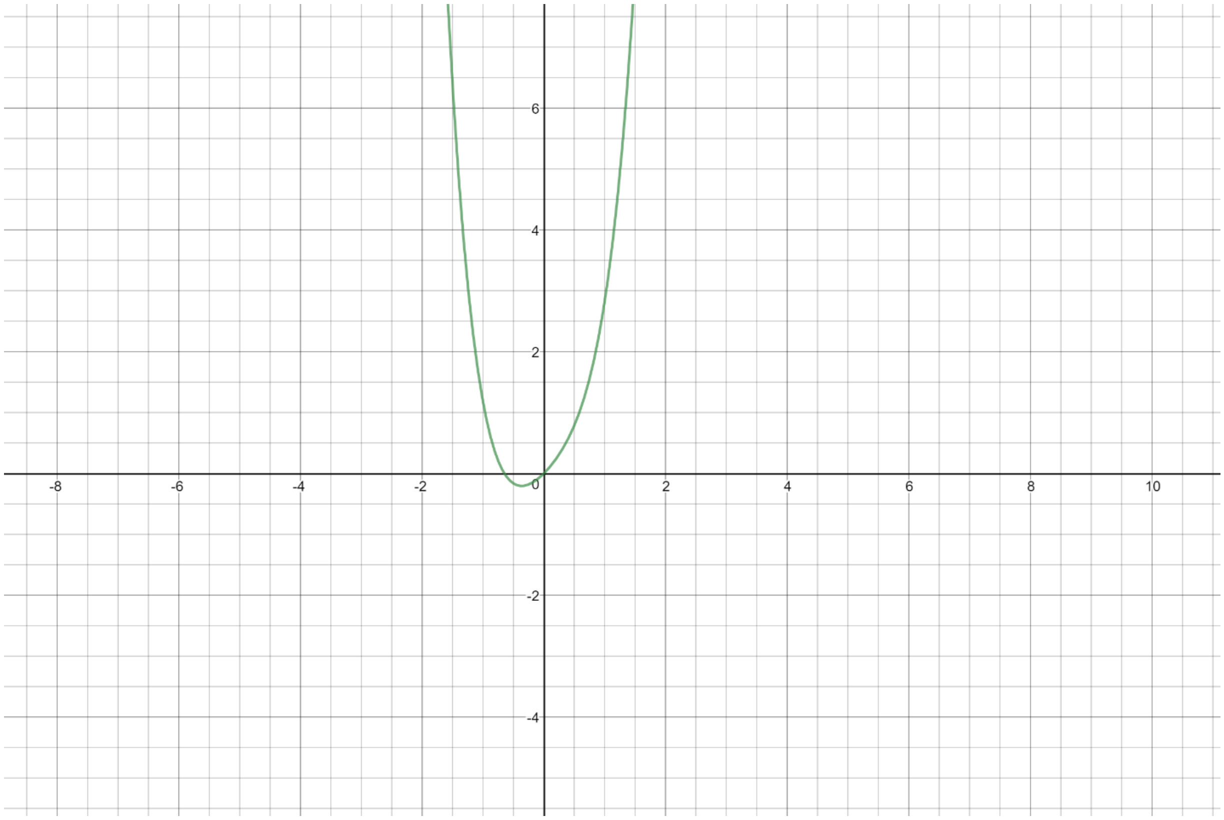
א) <u>משרטטים</u> (בדרך כלל סכום של פונקציות אלמנטריות).

למשל בתרגיל הזה, f מורכבת מסכום של פולינום x^4+x^2 ופונקציית $\sin x$.

הפולינום x^4+x^2 נראה כמו פרבולה שראשיתה בקודקוד, ואם נשרטט גם את ה- $\sin x$ על אותה מערכת צירים זה יראה משהו כזה:



כלומר אפשר ממש לראות גרפית שהסינוס בחלק השלילי "מושך" כלפי מטה את הפרבולה, ולכן נצפה לאחר החיבור בינהם למשהו כזה:



מכאן לפי הניתוח הגרפי נצפה לשתי פתרונות ממשיים בלבד.

ב) גוזרים, כאשר זוכרים שלפי משפט רול בין כל שני שורשים של f יש שורש של $f\,'$ (לפחות אחד).

אם כן מהכיוון ההפוך נוכל לומר כי אם ל- $f\,'$ יש שורש יחיד, אזי ל- f יש לכל היותר שני שורשים.

ובהכללה (מסקנה ממשפט רול): אם ל- $f\,'$ יש n שורשים אזי ל- f יש לכל היותר $n+1$ שורשים.

דוגמא פשוטה להמחשת דרך ב'

$f\,'(x)=x$ היא קו ישר לינארי המתאפס פעם אחת, כלומר ל- $f\,'$ יש שורש יחיד.

מכאן נסיק כי ל- f יש לכל היותר שני שורשים ואכן אחרי אינטגרל פשוט אכן מתקבלת הפרבולה:

$$f(x)=x^2+c$$

נשים-לב שאכן לפרבולה יש לכל היותר שני שורשים, כלומר או 0 או 1 או 2:

אם $c<0$ יש ל- f שני שורשים, אם $c=0$ יש אחד ואם $c>0$ אין שורשים.

נחזור לתרגיל:

נראה שיש ל- f בדיוק שני שורשים ממשיים.

נציב כמה ערכים ל- $f(x)=x^4+x^2+\sin x$:

$$f(1)=1+1+\sin(1)=2+\sin(1)>0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\left(-\frac{\pi}{6}\right)^4+\left(-\frac{\pi}{6}\right)^2+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\overset{\pi<3.5}{<}\left(\frac{3.5}{6}\right)^4+\left(\frac{3.5}{6}\right)^2-\frac{1}{2}=$$
$$=\left(\frac{7}{12}\right)^4+\left(\frac{7}{12}\right)^2-\frac{1}{2}=\left(\frac{7}{12}\right)^2\left(\left(\frac{7}{12}\right)^2+1\right)-\frac{1}{2}=\frac{49}{144}\cdot\left(\frac{49}{144}+1\right)=$$
$$=\frac{49}{144}\cdot\frac{193}{144}-\frac{1}{2}=\frac{9457}{20736}-\frac{1}{2}<\frac{10,000}{20,736}-\frac{1}{2}<0$$

$$f(-1)=1-1+\sin(-1)=-\sin(1)>0$$

f רציפה לכל x כסכום של אלמנטריות רציפות בכל $\mathbb{R}$.

בפרט f רציפה ב- $\left[-\frac{\pi}{6},1\right]$ וכמו-כן מתקיים: $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot f(1)<0$ ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $c\in\left(-\frac{\pi}{6},1\right)$ כך ש- $f'(c)=0$.

באופן דומה f רציפה ב- $\left[-1,-\frac{\pi}{6}\right]$ וכמו-כן מתקיים: $f(-1)\cdot f\left(-\frac{\pi}{6}\right)<0$ ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $c\in\left(-1,-\frac{\pi}{6}\right)$ כך ש- $f'(d)=0$.

כלומר עד כה הראנו של- f יש <u>לפחות</u> שני שורשים. נותר להראות שיש לה <u>לכל היותר</u> שני שורשים ולכן <u>בדיוק</u> שני שורשים.

f רציפה וגזירה לכל x כסכום של פונקציות רציפות וגזירות בכל $\mathbb{R}$, לכן לפי משפט רול בין כל שני שורשים של f יש שורש של: $f'(x)=4x^3+2x+\cos x$.

גם f' רציפה וגזירה לכל x כסכום של פונקציות רציפות וגזירות בכל $\mathbb{R}$, לכן לפי משפט רול בין כל שני שורשים של f' יש שורש של: $f''(x)=12x^2+2-\sin x$. אבל לפונקציה זו אין שורשים ממשיים שהרי היא כלל לא מתאפסת:

$$f''(x)=12x^2+2-\sin x\ge 12x^2+2-1=12x^2+1>0.$$

המסקנה היא של- f' יש לכל היותר שורש ממשי אחד, ומכאן של- f יש לכל היותר שני שורשים ממשיים.

בסה"כ יש ל- f בדיוק שני שורשים ממשיים.

מ.ש.ל

שאלה מספר 24 – חד-חד-ערכיות ועל

נתונה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

א) $f(x)=x^2$ היא הפיכה.

ב) $f(x)=x^3+1$ היא הפיכה. אם f הפיכה, מצא את $\left(f^{-1}\right)'(9)$.

ג) $f(x)=-x^3-x+1$ הפיכה. אם f הפיכה, מצא את $\left(f^{-1}\right)'(1)$

<u>תזכורות - פונקציה חד-חד-ערכית</u>

f נקראת חח"ע אם לכל $x_1,x_2\in D$: $x_2\neq x_1\Rightarrow f(x_2)\neq f(x_1)$

או באופן שקול אם: $f(x_2)=f(x_1)_1\Rightarrow x_2=x_1$

<u>במילים</u>: f נקראת <u>חד-חד-ערכית</u> אם לכל ערך y יש <u>לכל היותר</u> ערך אחד של x.

<u>משפט</u>: f מונוטונית עולה <u>ממש</u> $\Leftarrow$ f חח"ע

<u>**הערה**</u>: לא חשוב אם הפונקציה עולה או יורדת, מה שחשוב במשפט זה ה- **ממש**. כלומר גם אם הפונקציה מונוטונית יורדת <u>ממש</u>, אזי היא חח"ע.

<u>פונקציה על</u>

תהי f פונקציה בתחום D וטווח E.

הפונקציה נקראת **על** אם <u>לכל</u> $y\in E$ קיים $x\in D$ כך ש- $f(x)=y$.

<u>במילים</u>: f נקראת <u>על</u> אם לכל ערך y יש <u>לכל הפחות</u> ערך אחד של x.

<u>פונקציה הפיכה</u>

תהי פונקציה $f:D\to E$.

f נקראת פונקציה הפיכה אם קיימת פונקציה $g:E\to D$

כך שלכל $x\in D$: $g(f(x))=x$

ולכל $y\in E$: $f(g(y))=y$

g נקראת פונקציה הפוכה ל- f ומסומנת על-ידי: $g=f^{-1}$

<u>משפט</u>: f הפיכה $\Leftrightarrow$ f חח"ע ועל

פתרון סעיף א'

הטענה לא נכונה:

פונקציה חח"ע אם לכל y_0 יש לכל היותר x_0 אחד.

אבל כאן ל- $y_0=1$ יש שני מקורות: $x_1=1$ ו- $x_2=-1$. לכן f לא חח"ע.

הערה:

נשים-לב כי בענף החיובי של הפרבולה ($x\geq 0$) f כן חח"ע וכמו-כן גם בענף השלילי שלה ($x\leq 0$) אבל בסף הכל f כפי שראינו לא חח"ע לכל x.

כלומר f לא חח"ע ולכן זה כבר מספיק כדי לומר שהיא לא הפיכה. בכל זאת נראה שהיא גם לא על $\mathbb{R}$:

פונקציה על אם לכל y_0 יש x_0. אבל כאן ל- $y_0=-1$ לא קיים x מתאים. לכן f לא על $\mathbb{R}$.

הערה: נשים-לב כי f כן על $E=[0,\infty)$.

בסך הכל f לא הפיכה.

פתרון סעיף ב'

הטענה נכונה, נוכיח: כדי להראות ש- f הפיכה צריך להראות שהיא חח"ע ועל.

נעזר בהגדת חד-חד-הערכיות:

$$f(x_1)=f(x_2)$$
$$x_1^3+1=x_2^3+1$$
$$x_1^3=x_2^3$$
$$x_1=x_2$$

לכן f חח"ע. נותר להראות כי f היא על $\mathbb{R}$:

נבחר $y_0\in\mathbb{R}$ כלשהו. צריך להראות שקיים x_0 כך ש- $y_0=f(x_0)$.

$$y_0=x_0^3+1$$
$$x_0^3=y_0-1$$
$$x_0=\sqrt[3]{y_0-1}$$

ז"א f היא על וגם חח"ע ולכן הפיכה. מ.ש.ל.

כעת נמצא את $\left(f^{-1}\right)'(9)$.

הראנו כי $f\left(x\right)$ הפיכה, לכן לפי משפט, אם בנוסף גם $f'\left(x\right)\neq 0$ אזי:

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

<u>הערה</u>: אפשר לחשוב על זה כך: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

או כך: $\left[f^{-1}\left(y_0\right)\right]'=\left[f^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right)\right]'=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}$

עבור $y_0=9$ נקבל: $x_0=\sqrt[3]{9-1}=\sqrt[3]{8}=2$, כלומר: $f\left(2\right)=9$, כמו-כן נשים-לב כי: $f'\left(x\right)=3x^2$, ומכאן:

$$\left[f^{-1}(9)\right]'=\left[f^{-1}\left(f\left(2\right)\right)\right]'=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{3\cdot 2^2}=\frac{1}{12}$$

<u>פתרון סעיף ג'</u>

הטענה <u>נכונה</u>, נוכיח:

כדי להראות ש- f הפיכה צריך להראות שהיא חח"ע ועל. f גזירה כפולינום ומתקיים:

$f'\left(x\right)=-3x^2-1<0$ לכל x, לכן f מונוטונית יורדת ממש ולכן חח"ע ב- $\mathbb{R}$.

נותר להראות כי f היא על $\mathbb{R}$:

כלומר צריך להראות שקיים x_0 כך ש- $y_0=f\left(x_0\right)$. נשים-לב כי הפעם כדי להראות שלכל y_0 קיים x_0 מתאים מתוך המשוואה: $y_0=-x_0^3-x_0+1$, לא ניתן לבודד את x_0 בפשטות כפי שעשינו בסעיף הקודם. אז נגדיר פונקציית עזר: $h\left(x\right)=x^3+x-1+y_0$. כעת נותר להוכיח כי קיים x_0 כך ש- $h\left(x_0\right)=0$.

תחילה נבחן את התנהגות h בקצוות:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x^3 + x - 1 + y_0\right) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3 + x - 1 + y_0\right) = -\infty$$

היינו רוצים כעת להציב שני ערכים מספריים ב- h כדי לגלות נקודה אחת בה h חיובית ונקודה אחרת בה היא שלילית. אך מכיוון שאיננו יודעים את ערכו של y_0, לא ניתן לעשות זאת. לכן נפנה להגדרה:

$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$ לכן לכל M קיים x_0 כך שלכל $x \ge x_0$: $h(x) > M$.

אזי נבחר $M = 1$, עבורו ניתן למצוא x_1 כך שלכל $x \ge x_1$: $h(x) > 1$,

בפרט: $h(x_1) > 1 > 0$.

<u>באופן דומה בקרן השלילית</u>:

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ לכן לכל m קיים x_0 כך שלכל $x \le x_0$: $h(x) < m$.

אזי נבחר $m = -1$, עבורו ניתן למצוא x_2 כך שלכל $x \le x_2$: $h(x) < -1$,

בפרט: $h(x_2) < -1 < 0$.

h גזירה בכל $\mathbb{R}$ (פולינום) לכן בפרט רציפה ב- $[x_1, x_2]$ וכמו-כן $h(x_1) > 0$ ו- $h(x_2) < 0$ ולכן לפי **משפט ערך הביניים** קיימת נקודה $x_0 \in (x_1, x_2)$ כך ש- $h(x_0) = 0$.

ז"א f היא על וגם חח"ע ולכן הפיכה.

מ.ש.ל.

כעת נמצא את $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

$$f\left(x\right)=-x^{3}-x+1$$
$$f'\left(x\right)=-3x^{2}-1$$

נשים-לב כי בהצבת $x_0=0$ נקבל $y_0=1$, כלומר: $f\left(0\right)=1$, ומכאן:

$$\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{-3\cdot0^{2}-1}=-1$$

שאלה מספר 25 – משפט לגרנז'

הוכח כי לכל $x \geq 0$ מתקיים: $\sin x \leq x$.

פתרון

דרך ראשונה – באמצעות משפט לגרנז'

עבור $x = 0$ אי-השוויון ממילא מתקיים: $\sin 0 = 0$. לכן ניקח את $x > 0$.

$\sin x$ גזירה ורציפה בכל $\mathbb{R}$ ובפרט רציפה ב- $[0, x]$ וגזירה ב- $(0, x)$. לכן לפי משפט לגרנז'
קיימת נקודה $c \in (0, x)$ כך ש-

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = (\sin x)'\Big|_c = \cos(c) \leq 1$$

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\sin x \leq x$$

לכן בסה"כ קיבלנו כי לכל $x \geq 0$ מתקיים: $\sin x \leq x$.

מ.ש.ל

דרך שנייה – באמצעות פונקציית עזר

נגדיר פונקציית עזר: $h(x) = \sin x - x$ ונראה ש- $h(x) \leq 0$ לכל $x \geq 0$.

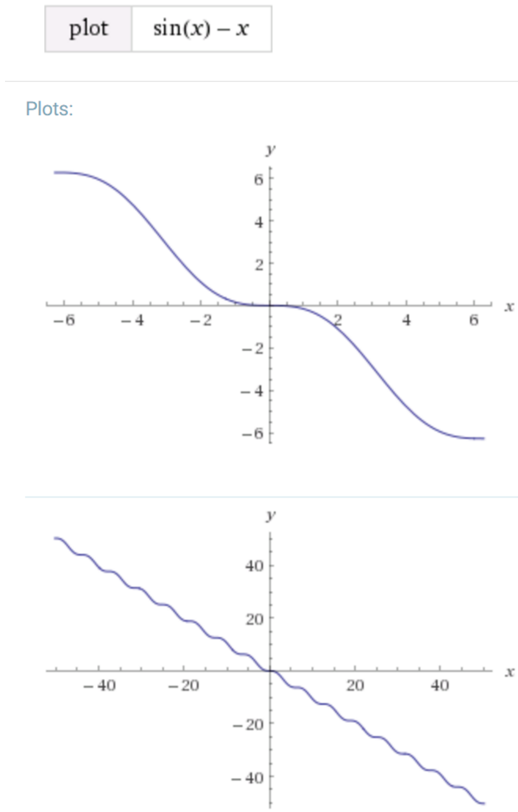
h גזירה ורציפה כהפרש של שתי פונקציות גזירות ורציפות: $h'(x) = \cos x - 1 \overset{\cos x \leq 1}{\leq} 0$.

כמו-כן מתקיים: $h(0) = \sin 0 - 0 = 0$.

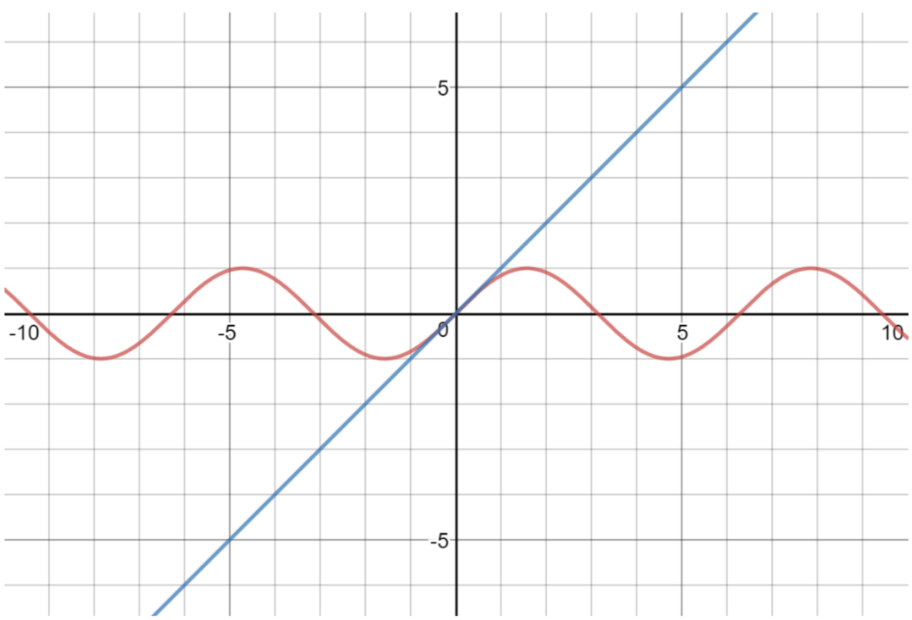
לכן לפי מסקנות משפט לגרנז' h מונוטונית יורדת לכל $x \geq 0$, ומכיוון ש- $h(0) = 0$ נובע שלכל
$x \geq 0$ מתקיים: $h(x) \leq h(0) = 0$, כלומר $\sin x \leq x$.

מ.ש.ל

שרטוט של פונקציית העזר $h(x)=\sin x - x$, במבט מקרוב ומרחוק:



המחשה של אי-השוויון $\sin x \le x$, ניתן לראות כי אכן גרף הסינוס $y=\sin x$ נמצא מתחת לגרף הישר $y=x$ לכל $x\ge 0$:



שאלה מספר 26 – משפט לגרנז'

הוכח שלכל $0<a<b$ מתקיים: $1-\frac{a}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b}{a}-1$

פתרון

נרצה להשתמש במשפט לגרנז'. תחילה נסדר את אי-השוויון:

$$1-\frac{a}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b}{a}-1$$

$$\frac{b-a}{b}<\ln(b)-\ln a<\frac{b-a}{a} \quad / \div(b-a)>0$$

$$\frac{1}{b}<\frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a}<\frac{1}{a}$$

כעת, נתבונן בפונקציה $f(x)=\ln x$ בקטע $a\le x\le b$.

f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) לכן, לכן לפי משפט לגרנז' קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-

$$\frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a}=f'(c)=(\ln x)'\Big|_{x=c}=\frac{1}{c}$$

לכן מספיק להראות כי: $\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$

אבל מכיוון ש- $0<a<c<b$ אזי אי-השוויון לעיל נובע מיידית.

מ.ש.ל

שאלה מספר 27 – משפט לגרנז'

הוכח כי לכל $1<a<b<e$ מתקיים אי-השוויון הבא:

$$b-a<b^2\ln(b)-a^2\ln(a)<3e(b-a)$$

פתרון

תחילה נפשט את הביטוי:

$$b-a<b^2\ln(b)-a^2\ln(a)<3e(b-a)\quad /\div(b-a)>0$$

$$1<\frac{b^2\ln(b)-a^2\ln(a)}{b-a}<3e$$

נתבונן בפונקציה $f(x)=x^2\ln x$ בקטע $a\le x\le b$.

$f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b). לכן לפי משפט לגרנז' קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש-

$$\frac{b^2\ln b-a^2\ln a}{b-a}=f'(c)=\left(x^2\ln x\right)'\Big|_{x=c}=\left(2x\ln x+x\right)\Big|_{x=c}=2c\ln c+c$$

לכן מספיק להראות כי: $1<2c\ln c+c<3e$

נשים-לב כי:

$$f'(x)=2x\ln x+x\ \Rightarrow\ f''(x)=2\ln x+2x\frac{1}{x}+1=2\ln x+3\overset{\forall x>0}{>}0$$

לכן $f'(x)$ מונוטונית <u>עולה ממש</u> לכל $x>0$, ולכן אם נפעיל על אגפי אי-השוויון $1<a<c<b<e$ את $f'(x)=2x\ln x+x$ נקבל בדיוק:

$$2\ln 1+1<2\ln a+a<2\ln c+c<2\ln b+b<2\ln e+e$$

$$1<2\ln c+c<2+e<2e+e=3e$$

$$1<2\ln c+c<3e$$

מ.ש.ל

טור טיילור

שאלה מספר 28 – הערכת מספר באמצעות טור טיילור

חשב את המספר e בדיוק של אלפית.

פתרון

נגדיר $f(x)=e^x$. נתבונן בטור טיילור-מקלורן שלה סביב $x_0=0$ בנקודה $x=1$:

$$e^x=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}...+\frac{x^n}{n!}\right)+R_n(x)=T_n(x)+R_n(x)$$

כך ש-
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}$$

כאשר- $0<c<1$

לחישוב סדר הטור (n) הדרוש להערכת e^1 בדיוק של אלפית נדרוש: $|R_n(x)|<10^{-3}$

$$|R_n(x)|=\frac{e^c}{(n+1)!}\overset{e^c<e^1<3}{<}\frac{3}{(n+1)!}<10^{-3}$$

$n=6$ הוא ה- n המינימלי המקיים את אי-השוויון לעיל:

$$\frac{3}{(6+1)!}=\frac{3}{7!}=\frac{3}{5040}=\frac{1}{1680}<\frac{1}{1000}$$

כלומר נפתח את הטור עד לסדר $n=6$:

$$T_6(1)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\bigg|_{x=1}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}=$$

$$2+\frac{360+120+30+6+1}{720}=2+\underbrace{\frac{517}{720}}_{\approx 0.71}\approx 2.71$$

הערה: התוצאה שקיבלנו במחשבון הינה: 2.71805 , לעומת ערך המספר e הידוע (עד 5 ספרות אחרי הנקודה): $e=2.71828$, כלומר ההפרש עומד על: $|2.71828-2.71805|=2.3\cdot10^{-4}<10^{-3}$

שאלה מספר 29 – חישוב נגזרת מסדר גבוה

נתונה הפונקציה $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$. חשב את $f^{(100)}(0)$.

פתרון

פיתוח טור טיילור-מקלורן (סביב $x_0=0$) כללי:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(100)}(0)}{100!}x^{100}+\ldots$$

רוצים את $f^{(100)}(0)$.

פיתוח טור טיילור-מקלורן של $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots-\frac{x^{50}}{50}+\ldots$$

מיחידות הטור, נפתח את טור המקלורן של $\ln\left(1+x^2\right)$:

$$\ln\left(1+x^2\right)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\frac{x^{10}}{5}-\frac{x^{12}}{6}+\ldots-\frac{x^{100}}{50}+\ldots$$

כעת ניתן להשוות את המקדמים של x^{100} בפיתוח האחרון לעיל לבין הפיתוח הכללי בהתחלה, כלומר:

$$-\frac{1}{50}=\frac{f^{(100)}(0)}{100!}$$

$$\Rightarrow f^{(100)}(0)=-\frac{100!}{50}=-\frac{99!100}{50}=-2\cdot 99!$$

$$\boxed{f^{(100)}(0)=-2\cdot 99!}$$

שאלה מספר 30 – פיתוח טור טיילור לאינטגרל

יהי $T_3(x)$ פולינום טיילור-מקלורן מסדר 3 סביב הנקודה $x=0$ של הפונקציה:

$$.F(x)=\int_0^x \sin\left(t^2+3t+\frac{\pi}{6}\right)dt$$

חשב את $T_3(2)$

פתרון

פיתוח פולינום מקלורן כללי מסדר 3:

$$T_3(x)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}x+\frac{F''(0)}{2!}x^2+\frac{F'''(0)}{3!}x^3$$

רוצים את $T_3(2)$:

$$T_3(2)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}2+\frac{F''(0)}{2!}2^2+\frac{F'''(0)}{3!}2^3=F(0)+2F'(0)+2F''(0)+\frac{4}{3}F'''(0)$$

נחשב:

$$F(0)=\int_0^0 \sin\left(t^2+3t+\frac{\pi}{6}\right)dt=0$$

$f(x)=\sin\left(t^2+6t+\frac{\pi}{6}\right)$ פונקציה רציפה (אלמנטרית) בכל $\mathbb{R}$ לכן $F(x)$ גזירה ומתקיים:

$$F'(x)=\sin\left(x^2+3x+\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow F'(0)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

גם זו פונקציה גזירה ומתקיים:

$$F''(x)=(2x+3)\cos\left(x^2+3x+\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow F''(0)=3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

גם זו פונקציה גזירה ומתקיים:

$$F'''(x)=2\cos\left(x^2+3x+\frac{\pi}{6}\right)-(2x+3)^2\sin\left(x^2+3x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow F'''(0)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-9\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\frac{\sqrt{3}}{2}-9\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}-\frac{9}{2}$$

נציב ונקבל:

$$T_3\left(2\right)=F\left(0\right)+2F'\left(0\right)+2F''\left(0\right)+\frac{4}{3}F'''\left(0\right)=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{3}\cdot\left(\sqrt{3}-\frac{9}{2}\right)=$$

$$1+3\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}-6=\frac{13}{\sqrt{3}}-5$$

$$\Rightarrow T_3\left(2\right)=\frac{13}{\sqrt{3}}-5$$

חקירת פונקציה

שאלה מספר 31 – חקירת פונקציה (ערך מוחלט)

נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\left|x^3-6x^2+9x-3\right|$.

א) האם יש לפונקציה מקסימום ומינימום (מוחלטים) בקטע $[0,4]$?

ב) מצא את כל נקודות המקסימום (מקומי או מוחלט), אם קיימות, בקטע $[0,4]$.

ג) כמה נקודות מינימום, אם קיימות, יש לפונקציה בקטע $[0,4]$?

<u>פתרון סעיף א'</u>

<u>הערה</u>: כשמבקשים מינימום ומקסימום **בקטע סגור**, הכוונה היא למינימום ומקסימום **מוחלטים**, גם אם זה לא צוין במפורש בשאלה (כמו נוסח שאלה זו במקור, שם לא צוין במפורש). במקרה של חוסר בהירות בשעת מבחן, להרים יד ולשאול מרצה.

f רציפה כהרכבה של אלמנטריות רציפות בכל $\mathbb{R}$. לכן בפרט f רציפה בקטע הסגור $[0,4]$ ולכן לפי ווירשטראס מקבלת את המינימום ואת המקסימום המוחלטים שלה בקטע.

<u>פתרון סעיף ב'</u>

נחקור את הפולינום $g(x)=x^3-6x^2+9x-3$. גם g רציפה (כפולינום) בכל $\mathbb{R}$ ובפרט ב- $[0,4]$ ולכן לפי ווירשטראס מקבלת את המינימום ואת המקסימום שלה בקטע.

g גזירה כפולינום. לפי פרמה g' מתאפסת בנקודות הקיצון המקומיות הפנימיות לקטע, כלומר נחפש קיצון מקומי ב- $(0,4)$:

$$g'(x)=3x^2-12x+9=0$$
$$3\left(x^2-4x+3\right)=0$$
$$3(x-1)(x-3)=0$$
$$\Rightarrow x_1=1\ ,\ x_2=3$$

כלומר נקודות חשודות לקיצון מקומי הן $x_2=3$, $x_1=1$. נעזר במבחן הנגזרת השנייה לקבוע מינימום או מקסימום:

$$g''(x)=6x-12$$
$$g''(1)=6-12=-6<0 \Rightarrow \max$$
$$g''(3)=18-12=6>0 \Rightarrow \min$$

נמצא את ערכי y המתאימים על-ידי הצבה בפונקציה המקורית:

$$g(x)=x^3-6x^2+9x-3$$
$$g(1)=1-6+9-3=1$$
$$g(3)=27-54+27-3=-3$$

כלומר קיבלנו עד כה שתי נקודות קיצון מקומיות: $(3,-3)\min$, $(1,-1)\max$

למציאת קיצון גלובלי (מוחלט) בכל הקטע $[0,4]$ נציב גם את נקודות הקצה:

$$g(0)=-3$$
$$g(4)=64-96+36-3=1$$

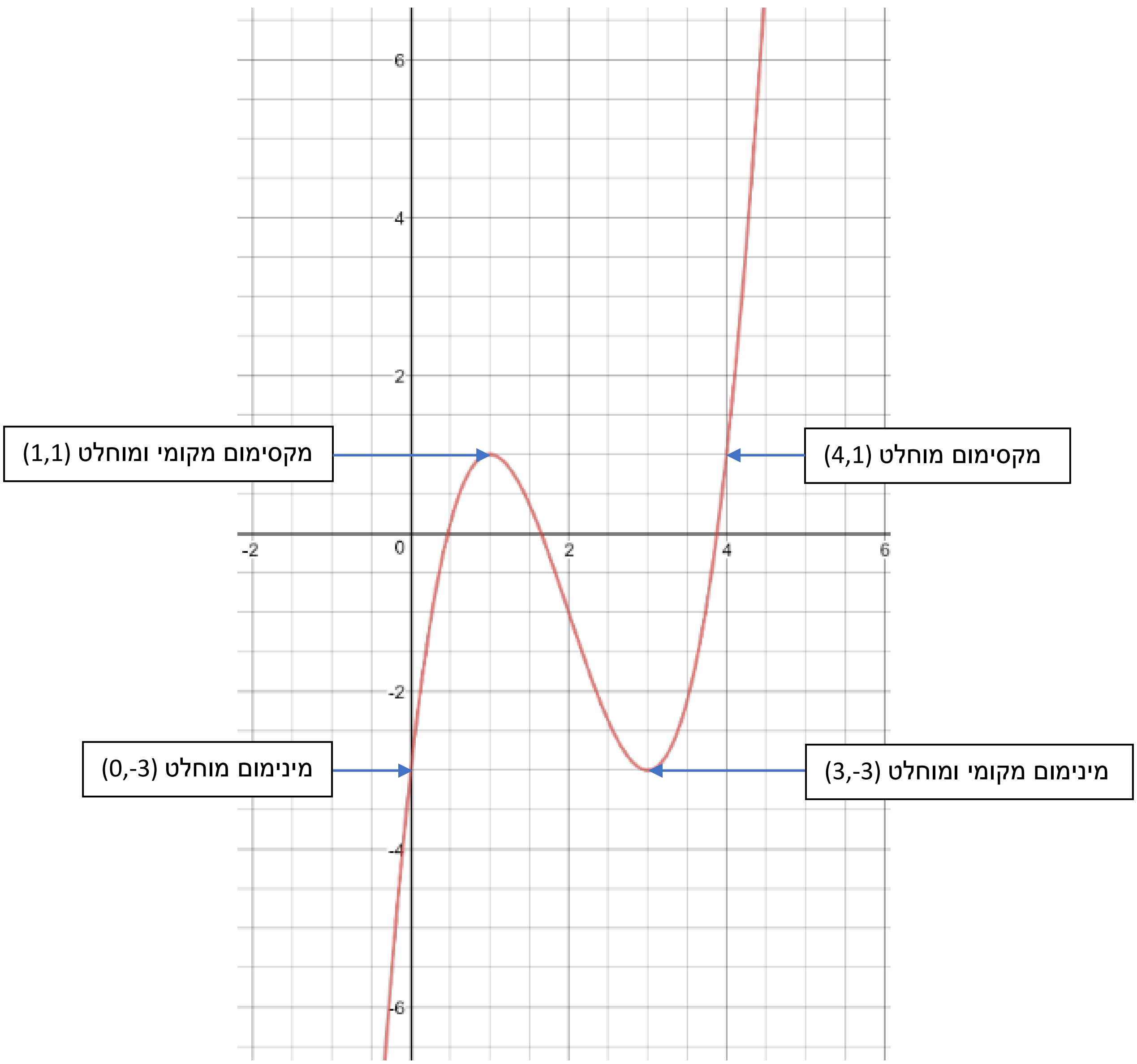
כלומר קיבלנו עד כה:

$(0,-3)$	Global min
$(1,1)$	Global & local max
$(3,-3)$	Global & local min
$(4,1)$	Global max

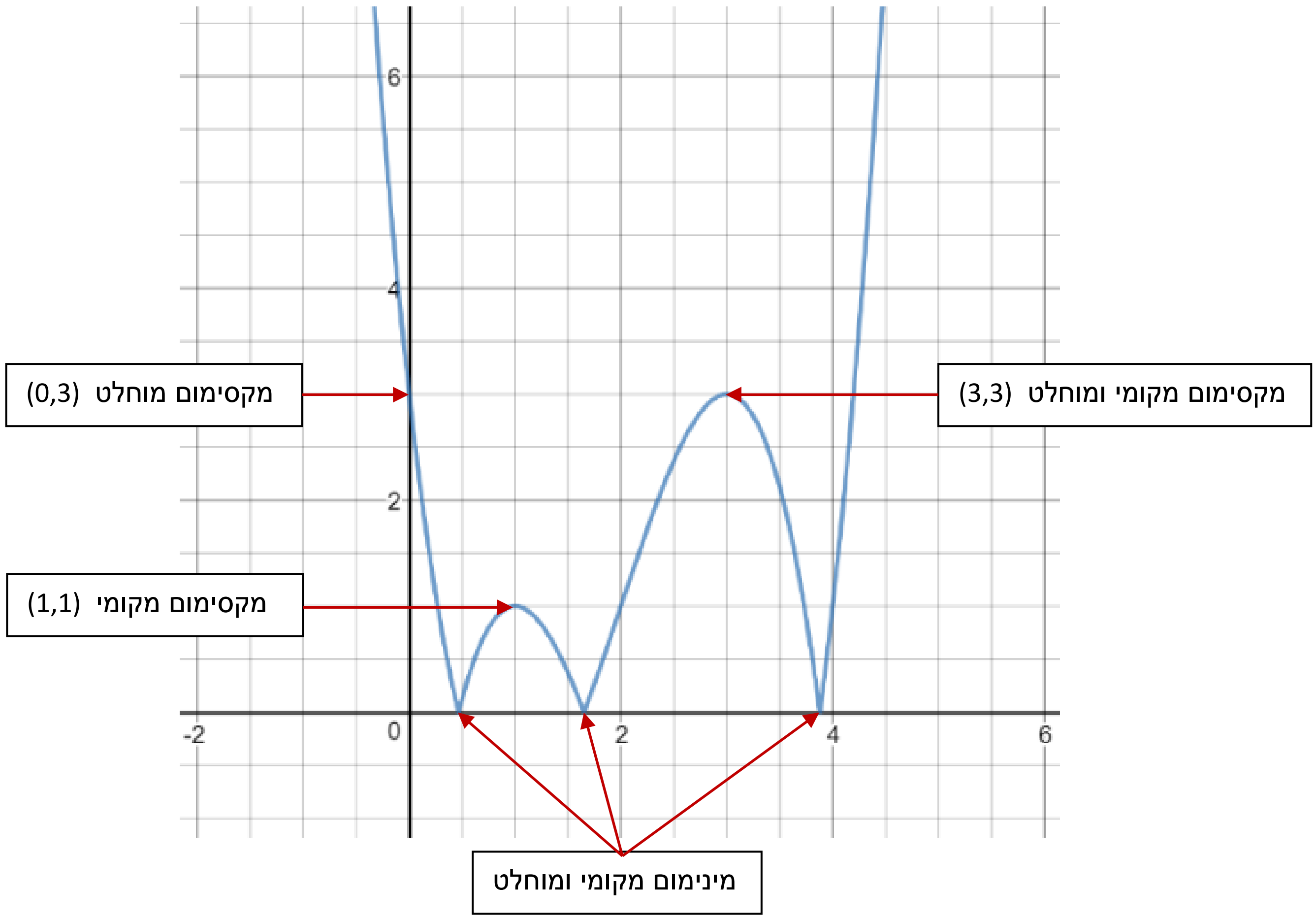
למרות שמבקשים לחקור רק בקטע $[0,4]$, נבדוק את התנהגות הפונקציה באינסוף:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^3-6x^2+9x-3\right)=\pm\infty$. בצורה זו נוכל לשרטט סקיצה של g יותר בקלות.

נשרטט סקיצה של g , כאשר הקטע $[0,4]$ הוא תחום העניין שלנו.



וכעת בהצבת ערך מוחלט נשקף את הענפים השליליים אל מעל ציר ה- x ונשרטט את f. שוב נזכור כי הקטע $[0,4]$ בלבד הוא תחום העניין שלנו.



כלומר בהצבת הערך המוחלט נקבל:

$(0,3)$	Global max
$(1,1)$	local max
$(3,3)$	Global & local max

<u>פתרון סעיף ג'</u>

ישנן שלוש נקודות מינימום לפונקציה בקטע, כולן מקומיות ומוחלטות, בגובה אפס.

שאלה מספר 32 – אי-שוויון בעזרת תחומי קמירות/קעירות

א) נסח את הגדרת הקמירות לפונקציה.

ב) הוכח כי לכל $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ מתקיים: $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$

ג) הוכח כי: $\int_0^1\sin\left(x^2\right)dx\ge\frac{2}{3\pi}$

פתרון סעיף א' – הגדרת הקמירות

הפונקציה $f\left(x\right)$ נקראת **קמורה** בנקודה x_0 אם קיימת סביבה של x_0 כך שבסביבה זו גרף הפונקציה נמצא מעל המשיק ב- x_0, כלומר קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ מתקיים:

$$f\left(x\right)>f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$$

$f\left(x\right)$ נקראת קמורה בקטע כלשהו אם היא קמורה בכל נקודה בקטע.

פתרון סעיף ב' - דרך ראשונה (recommended) – לפי תחומי קמירות/קעירות

$f\left(x\right)=\sin x$ פונקציה קעורה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ משום שלכל $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ הנגזרת השנייה של f שלילית $f''\left(x\right)=-\sin x\le0$. מכיוון שהיא קעורה, כל מיתר המחבר שתי נקודות על הגרף שלה נמצא מתחת לגרף הפונקציה. נתבונן במיתר $y\left(x\right)=\frac{2}{\pi}x$, אזי מתקיים:

$$\begin{cases}y\left(0\right)=0\\ f\left(0\right)=\sin0=0\end{cases}\Rightarrow y\left(0\right)=f\left(0\right)\quad,\quad\begin{cases}y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}=1\\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\end{cases}\Rightarrow y\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

לכן גרף המיתר $y\left(x\right)=\frac{2}{\pi}x$ נמצא מתחת לגרף הפונקציה $f\left(x\right)=\sin x$ לכל $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

כלומר $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$ לכל $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

דרך שנייה – לפי חקירת פונקציית עזר

נגדיר פונקציית עזר: $f\left(x\right)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$. כלומר נותר להוכיח כי $f\left(x\right)\geq 0$ לכל $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

.

f רציפה ב- $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ כהפרש של פונקציות אלמנטריות רציפות בקטע ולכן לפי משפט **ויירשטראס** מקבלת את הערך המקסימלי והמינימלי שלה בקטע (ערכי קיצון מוחלטים).

הנקודות החשודות לקיצון מוחלט הן הנקודות בהן $f'=0$ או f' לא קיימת או בקצוות הקטע. מכיוון ש- f גזירה בקטע כהפרש של פונקציות גזירות, אזי הנקודות החשודות הן הנקודות בהן $f'=0$ או בקצוות הקטע. נגזור: $f'\left(x\right)=\cos x-\frac{2}{\pi}$. למציאת נקודות חשודות לקיצון נשווה ל- 0 :

$$f'\left(x\right)=\cos x-\frac{2}{\pi}=0\ \Rightarrow\cos x=\frac{2}{\pi}$$

$$x_{1,2}=\pm\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)+2\pi n$$

נרצה לדעת כמה פתרונות נמצאים בתוך הקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

f' רציפה ב- $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ כהפרש של פונקציות אלמנטריות רציפות. כמו-כן מתקיים:

$$f'\left(0\right)=\cos 0-\frac{2}{\pi}=1-\frac{2}{\pi}>0\quad,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}=0-\frac{2}{\pi}<0$$

ולכן לפי משפט **ערך הביניים**, ל- f' קיימת לפחות נקודה אחת $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ בה $f'\left(x_0\right)=0$.

$\cos x$ מונוטונית יורדת ממש ב- $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ולכן גם $f'(x)$ מונוטונית יורדת ממש בקטע ולכן **חח"ע** שם.

לכן כל ערך בין $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ מתקבל פעם אחת. לכן $f'(x_0)=0$ פתרון יחיד ($x_0=\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$).

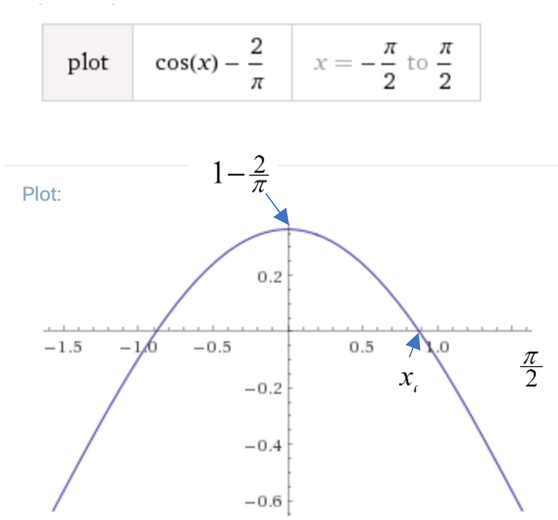
בנוסף, משום ש- $f'(x)$ מונוטונית יורדת ממש ב- $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ומתאפסת ב- x_0, אזי $f'>0$ משמאל ל- x_0 ו- $f'<0$ מימין ל- x_0 ולכן $(x_0, f(x_0))$ נקודת מקסימום. כמו-כן בקצוות הקטע מתקיים:

$$f(0)=\sin 0-\frac{2}{\pi}0=0\ ,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}=1-1=0$$

כלומר הערך המקסימלי שהפונקציה מקבלת הוא $f(x_0)$ והערך המינימלי הוא 0. לכן בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ מתקיים: $\underbrace{0\le f(x)}_{0\le \sin x-\frac{2}{\pi}x}\le f(x_0)$. ניקח את החלק השמאלי של אי-השוויון ונקבל את מה שצריך להוכיח.

מ.ש.ל

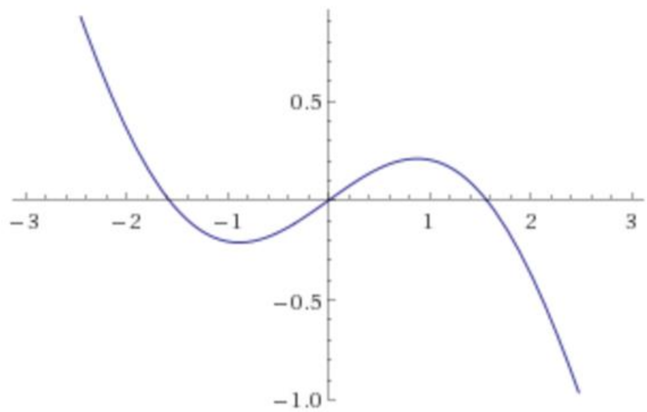
<u>שרטוט של הנגזרת</u>



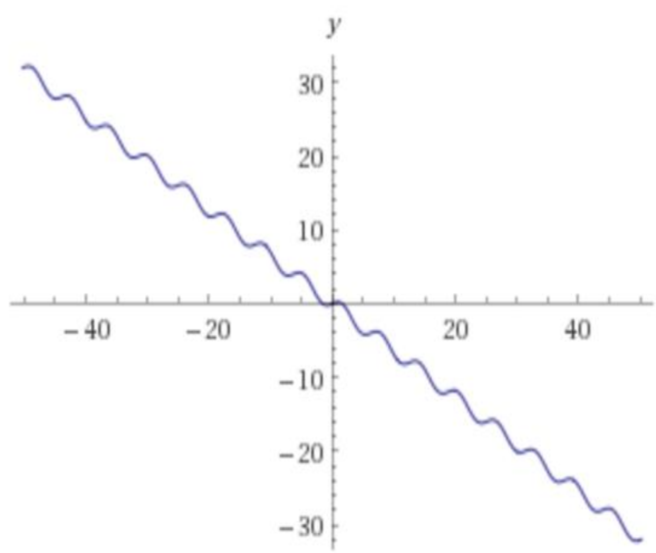
שרטוט של פונקציית עזר: $f\left(x\right)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$:

plot	$\sin(x)-\frac{2}{\pi}x$	$x=-3$ to 3

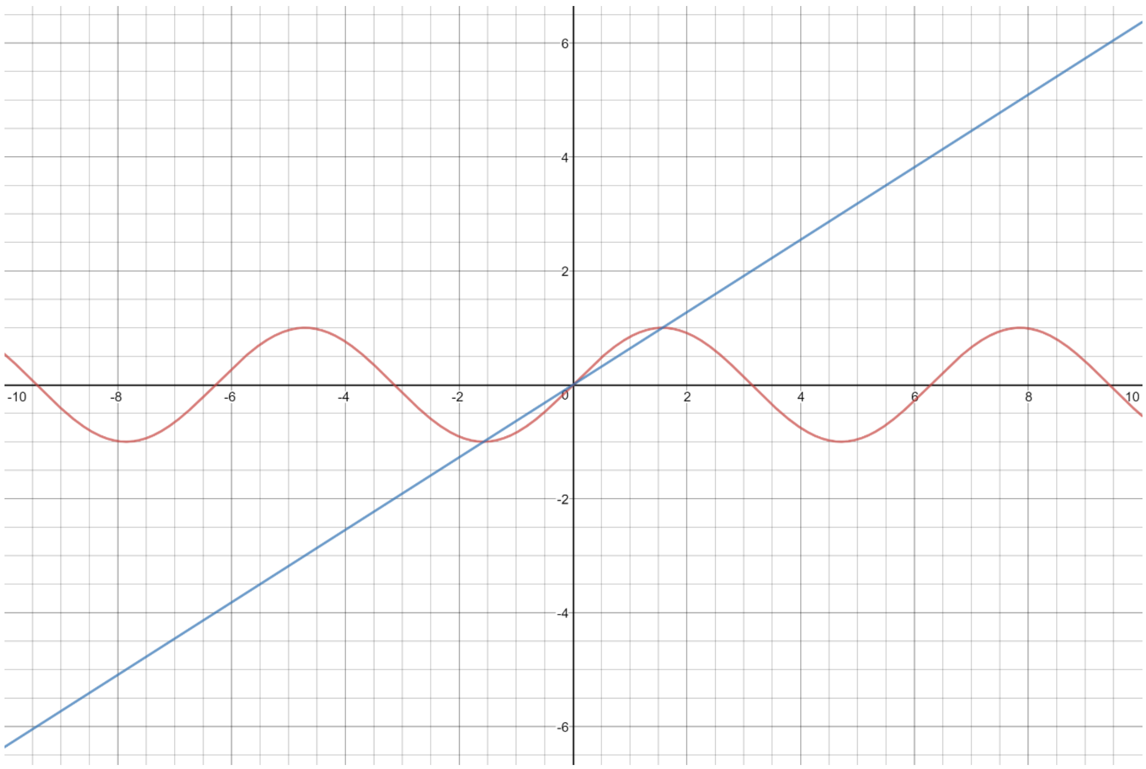
Plot:



ובמבט מרחוק:



המחשה של אי-השוויון $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$. ניתן לראות כי אכן גרף הסינוס $y=\sin x$ נמצא מעל לגרף הישר $y=\frac{2}{\pi}x$ לכל $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:



<u>פתרון סעיף ג'</u>

בסעיף הקודם הוכחנו כי לכל $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ מתקיים: $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$.

אם $0\le x\le 1$ (תחום האינטגרציה) אזי גם: $0\le x^2\le 1$, ובפרט: $0\le x^2\le 1\le\frac{\pi}{2}$, כלומר לפי א"ש הקודם לכל $0\le x^2\le\frac{\pi}{2}$ מתקיים: $\sin x^2\ge\frac{2}{\pi}x^2$.

לכן:
$$\int_0^1 \sin\left(x^2\right)dx \ge \int_0^1 \frac{2}{\pi}x^2 = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3\pi}$$

מ.ש.ל

שאלה מספר 33 – אי-שוויון בעזרת תחומי קמירות/קעירות

א) הוכח כי לכל $x\in[0,1]$ מתקיים: $\arctan(x)\ge\frac{\pi}{4}x$.

ב) הוכח כי: $\int_0^1 \arctan\left(x^2\right)dx\ge\frac{\pi}{12}$

פתרון סעיף א'

$f(x)=\arctan(x)$ פונקציה קעורה בקטע $[0,1]$ משום שלכל $x\in[0,1]$ הנגזרת השנייה של f שלילית:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{-1}$$

$$f''(x)=-\left(1+x^2\right)^{-2}(2x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)}\overset{0\le x\le 1}{\le}0$$

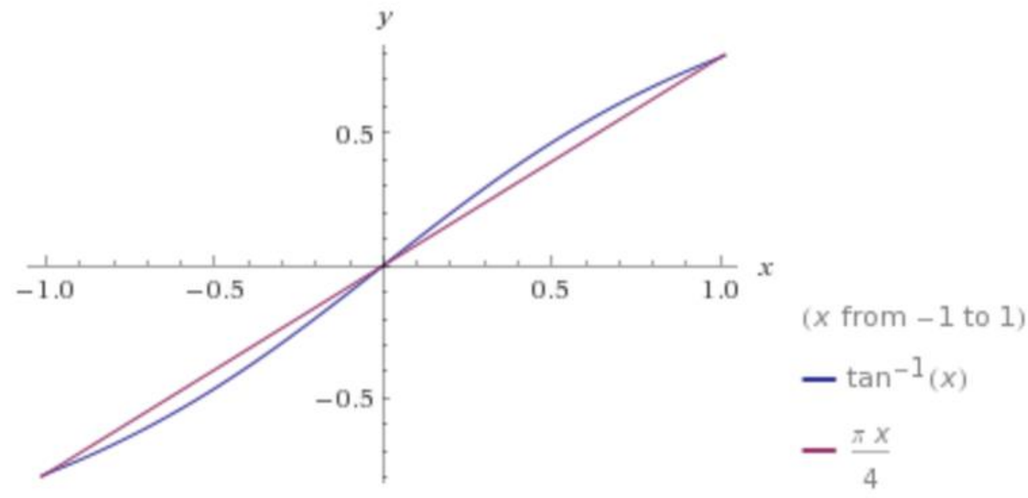
מכיוון שהיא קעורה, כל מיתר המחבר שתי נקודות על הגרף שלה נמצא מתחת לגרף הפונקציה. נתבונן במיתר $y(x)=\frac{\pi}{4}x$, אזי מתקיים:

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ f(0)=\arctan 0=0 \end{cases}\Rightarrow y(0)=f(0) \quad , \quad \begin{cases} y(1)=\frac{\pi}{4} \\ f(1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4} \end{cases}\Rightarrow y(1)=f(1)$$

לכן גרף המיתר $y(x)=\frac{\pi}{4}x$ נמצא מתחת לגרף הפונקציה $f(x)=\arctan(x)$ לכל $x\in[0,1]$

, כלומר $\arctan(x)\ge\frac{\pi}{4}x$ לכל $x\in[0,1]$.

Plot:



<u>פתרון סעיף ב'</u>

בסעיף הקודם הוכחנו כי לכל $0 \le x \le 1$ מתקיים: $\arctan(x) \ge \frac{\pi}{4}x$.

אם $0 \le x \le 1$ (תחום האינטגרציה) אזי גם: $0 \le x^2 \le 1$, לכן:

$$\int_0^1 \arctan\left(x^2\right)dx \ge \int_0^1 \frac{\pi}{4}x^2 = \frac{\pi}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

מ.ש.ל

<u>הערה</u>: ממחשבון אינטגרלים יוצא ש- $\int_0^1 \arctan\left(x^2\right)dx \approx 0.29$, וכמו-כן: $\frac{\pi}{12} \approx 0.26$, כלומר אכן

$$\int_0^1 \arctan\left(x^2\right)dx \approx 0.29 \ge 0.26 \approx \frac{\pi}{12}$$

סדרות

שאלה מספר 34 – חישוב גבול

חשב את הגבול הבא: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^{3n}$

פתרון

$$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^{3n}=\left(1+\frac{2n+1}{2n^2}\right)^{3n}=\left(1+\frac{1}{\left(\frac{2n^2}{2n+1}\right)}\right)^{3n}=\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{2n^2}{2n+1}\right)}\right)^{\frac{2n^2}{2n+1}}\right]}_{\to e}^{\underbrace{\frac{2n+1}{2n^2}\cdot 3n}_{\to\frac{6}{2}=3}}\to e^3$$

שאלה מספר 35 – חישוב גבול

*שאלה זו מכילה שימוש במבחן המנה לסדרות, מבחן השורש לסדרות ומשפט "ומשה" (="ומה שבינהם", משפט הקושר את מבחן המנה למבחן השורש, ראו הספר הכחול של בן-ציון קון, עמוד 69, משפט 7, פרק סדרות) – אם לא נלמד הסמסטר, נא לדלג לשאלה הבאה.

חשב את הגבולות הבאים:

א) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

ב) $\lim_{n\to\infty}\frac{(1.01)^n}{n^{101}}$

ג) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}}$

פתרון סעיף א'

כלל אצבע: כשרואים עצרת – מבחן המנה. כשרואים חזקות של n – מבחן השורש.

*כשרואים גם וגם (כמו בתרגיל הזה, נשתמש במבחן המנה). נעזר במבחן המנה:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}}=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)n!}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot 2=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\to e^{-1}}\cdot 2\to\frac{2}{e}<1$$

לכן לפי מבחן המנה: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=0$

פתרון סעיף ב'

אנחנו רואים שיש לנו כאן חזקה של n במונה: $(1.01)^n$ לכן כפי שאמרנו בסדרות עם חזקות של n - כדאי להשתמש במבחן השורש!

$$\sqrt[n]{\frac{(1.01)^n}{n^{101}}}=\frac{\sqrt[n]{(1.01)^n}}{\sqrt[n]{n^{101}}}=\frac{1.01}{\underbrace{\sqrt[n]{n^{101}}}_{\to 1}}\to\frac{1.01}{1}>1$$

כאשר השתמשנו בכך ששורש n-י של פולינום חיובי מכל מעלה שואף ל-1 (כאן יש פולינום ממעלה 101) : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{101}}=1$

לכן לפי מבחן השורש: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{101}}{(1.01)^n}=\infty$

פתרון סעיף ג'

$$a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)(2n+2)}}{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}}=$$

$$=\frac{\cancel{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\,(2n+1)}{\cancel{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\,(2n+2)}\cdot\frac{\cancel{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}}{\cancel{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}}=\frac{(2n+1)}{(2n+2)}\to\frac{2}{2}=1$$

לכן לפי משפט מתקיים שזהו גם הגבול של השורש ה- n-י של הסדרה, כלומר:

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

שאלה מספר 36 – חישוב גבול

חשב את הגבול הבא: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^2 1+2\sin^2 2+3\sin^2 3+\ldots+n\sin^2 n}$

פתרון

$$\sqrt[n]{\sin^2 1+2\sin^2 2+3\sin^2 3+\ldots+n\sin^2 n}$$

מצד אחד: $\le\sqrt[n]{1+2+3+\ldots+n}=\sqrt[n]{\frac{n}{2}(1+n)}=\sqrt[n]{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}\to 1$

כי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{P(n)}=1$ לכל פולינום חיובי $P(n)>0$ (במקרה לעיל יש לנו פולינום חיובי ממעלה 2 בתוך השורש ה-חי).

מצד שני: $\ge\sqrt[n]{\sin^2 1}\to 1$

כי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$ לכל קבוע חיובי $c>0$. לכן לפי משפט הסנדביץ':

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^2 1+2\sin^2 2+3\sin^2 3+\ldots+n\sin^2 n}=1$$

שאלה מספר 37 – נכון/לא נכון

קבע האם הטענות הבאות נכונות או לא נכונות:

א) אם $a_n b_n \to 0$ אזי: $a_n \to 0$ או $b_n \to 0$

ב) אם $a_n \to L$ ו- $a_n > 1$ אזי: $L > 1$

<u>פתרון סעיף א'</u>

לא נכון. למשל ניקח את הסדרות:

$$b_n = \begin{cases} 1 & n \ odd \\ 0 & n \ even \end{cases} \quad , \quad a_n = \begin{cases} 0 & n \ odd \\ 1 & n \ even \end{cases}$$

אזי מתקיים כי:

$$a_n b_n = \begin{cases} 0 & n \ odd \\ 0 & n \ even \end{cases} = 0$$

אבל כמובן ש- $\lim_{n\to\infty} a_n$ ו- $\lim_{n\to\infty} b_n$ כלל לא קיימים!

<u>פתרון סעיף ב'</u>

לא נכון.

למשל: $a_n = 1 + \frac{1}{n} > 1$ לכל n אבל $L = 1$.

*מבוסס על המשפט: אם $a_n \to L$ ו- $a_n > b$ אזי: $L \ge b$

שאלה מספר 38 – נכון/לא נכון

הסדרה b_n מוגדרת על-ידי הסדרה a_n באופן הבא: $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$.

קבע האם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה:

אם $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ אזי גם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

<u>פתרון</u>

הטענה לא נכונה. ניקח למשל את: $a_n = \begin{cases} 0 & n \ odd \\ 1 & n \ even \end{cases}$, ומכאן: $a_{n+1} = \begin{cases} 1 & n \ odd \\ 0 & n \ even \end{cases}$

כעת נתבונן במכפלה:

$$b_n = a_n \cdot a_{n+1} = \begin{cases} 0 & n \ odd \\ 0 & n \ even \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

אבל ברור כי $\lim_{n\to\infty} a_n$ כלל לא קיים.

שאלה מספר 39 – סדרה רקורסיבית

נתונה הסדרה הבאה:
$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+a_n}{3} \\ a_1=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

אזי:

א) a_n לא חסומה.

ב) a_n מונוטונית יורדת ומתכנסת ל- 2.

ג) a_n מונוטונית עולה ומתכנסת ל- 2.

ד) a_n מונוטונית יורדת ומתכנסת ל- 0.

ה) $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$

פתרון

נעבוד לפי שלבי האינדוקציה:

שלב אפס – אינטואיציה

בשלב זה נציב כמה איברים רק כדי לקבל אינטואיציה על איך הסדרה הזאת מתנהגת.

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+a_n}{3}$$

נתון לנו כי $a_1=\frac{1}{3}$, בואו נראה למה שווה a_2:

$$a_2=\frac{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}{3}=\frac{\frac{4}{9}}{3}=\frac{4}{27}$$

כלומר מ- $\frac{1}{3}$ ירדנו ל- $\frac{4}{27}$ שהוא הרבה יותר קטן משליש, ומתוך מבנה הסדרה נוכל רק לשער שהיא תמשיך לרדת שכן כל שבר קטן מ- 1 שנציב בה, יקטין אותו עוד יותר. נמשיך לפי שלבי האינדוקציה:

שלב ראשון – מונוטוניות

1) **טענה:** a_n מונוטונית יורדת ממש: $a_{n+1} < a_n$ לכל n.

2) **בדיקה:** עבור $n=1$: $a_2 = \frac{4}{27} < \frac{9}{27} = \frac{1}{3} = a_1$

3) **הנחת האינדוקציה:** נניח שהטענה נכונה עבור n כלשהו, כלומר נניח ש- $a_{n+1} < a_n$

4) **הוכחה:** נרצה להוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר צ"ל: $a_{n+2} \overset{?}{<} a_{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}^2 + a_{n+1}}{3} \overset{?}{<} \frac{a_n^2 + a_n}{3}$$

$$a_{n+1}^2 + a_{n+1} \overset{?}{<} a_n^2 + a_n$$

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 + a_{n+1} - a_n \overset{?}{<} 0$$

$$(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) + (a_{n+1} - a_n) \overset{?}{<} 0$$

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{\overset{*}{<}0}\underbrace{(a_{n+1} + a_n + 1)}_{\overset{**}{>}0} < 0$$

* לפי הנחת האינדוקציה.

** כל איבריה חיוביים (אנחנו מניחים כאן הנחה לגיטימית במובלע על סמך העובדה שהסדרה מתחילה מאיבר ראשון חיובי ומורכבת מביטוי חיובי, בהמשך ההוכחה גם נראה זאת ממש).

לכן הסדרה מונוטונית יורדת ממש.

נעבור לשלב הבא. כדי לבדוק חסימות, תחילה נניח שהסדרה מתכנסת לגבול L כלשהו:

שלב שני – הנחת התכנסות

נוסחת הנסיגה היא: $a_{n+1}=\frac{a_n^2+a_n}{3}$

כעת, אם קיים $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי גם $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=L$ ומתוך נוסחת הנסיגה ומאריתמטיקה של גבולות:

$$L=\frac{L^2+L}{3}$$
$$3L=L^2+L$$
$$L^2-2L=0$$
$$L(L-2)=0$$
$$L_1=0\ \ ,\ \ L_2=2$$

מכיוון שהוכחנו כבר שהסדרה מונוטונית יורדת והיא מתחילה משליש, אזי נוכל לפסול את $L=2$.

נבחן בשלב הבא האם $L=0$ מהווה חסם מלרע של הסדרה.

שלב שלישי – חסימות

טענה: a_n חסומה מלמטה: $a_n>0$ לכל n (שימו-לב שאנחנו למעשה מוכחים כאן שהסדרה חיובית)

בדיקה: עבור $n=1$: $a_1=\frac{1}{3}>0$

הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור n כלשהו, כלומר נניח ש- $a_n>0$

הוכחה: נרצה להוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר צ"ל: $a_{n+1}\overset{?}{>}0$

$$\frac{a_n^2+a_n}{3}\overset{?}{>}0$$
$$a_n^2+a_n\overset{?}{>}0$$
$$\underset{\overset{*}{>}0}{a_n}\underbrace{(a_n+1)}_{\overset{*}{>}0}>0$$

* מהנחת האינדוקציה.
לכן הסדרה חסומה מלמטה.

שלב רביעי – התכנסות לגבול

קיבלנו סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה ולכן מתכנסת.

את גבולה כבר חישבנו בשלב הנחת ההתכנסות: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, לכן התשובה הנכונה היא תשובה (ד).

שאלה מספר 40 – סדרה רקורסיבית

נתונה הסדרה הבאה: $a_{n+1}=2a_n-1$ עם תנאי ההתחלה: $a_1=1$.

א) קבע האם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה: $\lim_{n\to\infty}a_n$ קיים וסופי.

ב) משנים לאותה סדרה את תנאי ההתחלה כך שהפעם: $a_1=2$. קבע האם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה: $\lim_{n\to\infty}a_n$ קיים וסופי.

ג) שוב משנים לאותה סדרה את תנאי ההתחלה כך שהפעם: $a_1=0$. קבע האם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה: $\lim_{n\to\infty}a_n$ קיים וסופי.

<u>פתרון סעיף א'</u>

<u>הטענה נכונה</u>

בהצבת $a_1=1$ בנוסחת הנסיגה מתקבל האיבר הבא: $a_2=2\cdot1-1=1$ ואם נציב שוב 1 בנוסחת הנסיגה נקבל שוב אותה תוצאה 1, בסך הכל התקבלה הסדרה הקבועה $a_n=1$ שגבולה הוא כמובן 1.

<u>פתרון סעיף ב'</u>

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n-1 \\ a_1=2 \end{cases}$$

כעת בסעיף הזה שינו לנו את תנאי ההתחלה ל- 2, בואו נבדוק מונוטוניות.

נחשב את האיבר הבא: $a_2=2\cdot2-1=3$

אם נחשב את האיבר הבא נקבל: $a_3=2\cdot3-1=5$

שימו-לב, מקבלים כאן סדרה מהצורה: $2,3,5,9,...$. ניכר לעין שהסדרה הזאת מתבדרת לאינסוף כלומר הטענה <u>לא נכונה</u>, מכיוון שהגבול הוא לא סופי (הוא אומנם קיים אך בהחלט לא סופי). אז בואו נוכיח זאת. תחילה נניח כי הסדרה מונוטונית עולה, כלומר נניח כי $a_{n+1}>a_n$ ונרצה להוכיח כי גם $a_{n+2}>a_{n+1}$. <u>בדיקה</u>: כבר חישבנו - $a_2=3>2=a_1$

$$a_{n+2} > a_{n+1}$$
$$2a_{n+1} - 1 > 2a_n - 1$$
$$2a_{n+1} > 2a_n$$
$$a_{n+1} > a_n$$

וזה מה שהיה צריך להוכיח ולכן הסדרה מונוטונית עולה ממש.

כעת, קיבלנו כי הסדרה מונוטונית עולה, נניח בשלילה שהיא גם חסומה, אזי היא עולה וחסומה לכן מתכנסת. אז אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, אזי גם $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ ואז לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל:

$$L = 2L - 1$$
$$L = 1$$

קודם כל שימו-לב למספר שקיבלנו, 1 זוהי בדיוק הנקודה בהן התקבלה סדרה קבועה (זה לא במקרה ותכף נסביר את זה)

אבל אם הסדרה מתחילה מ- $a_1 = 2$ (להמחיש גרפית) ומשם רק עולה (ממש), לכן לא ייתכן שהיא תתכנס ל- $L = 1$ כלומר קיבלנו סתירה ו- a_n עולה ולא חסומה ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

<u>פתרון סעיף ג'</u>

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 1 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

בואו נציב כמה איברים ראשונים בנוסחת הנסיגה, נקבל: $0, -1, -3, -7, \ldots$. הסדרה הזאת מתבדרת ל- $-\infty$ (הוכחה סימטרית לחלוטין לסעיף הקודם, הוכיחו לבד).

שאלות לתרגול נוסף עם פתרונות מלאים (אינטואיציה)

הערה: המטרה של חלק זה הוא לתת לכם **אינטואיציה** והבנה מעמיקה יותר של החומר, לכן הפתרונות לחלק זה מנוסחים באופן אינטואיטיבי בלבד ובנפנופי ידיים וכמובן שכדי להוכיח בצורה פורמלית יש להשתמש בצורת הניסוח כפי שלמדנו בכיתה על הלוח.

שאלה מספר 1 – מספר שורשים לפונקציה

לפונקציה: $f(x)=x^2-\ln(1+x^2)-\cos(x)$

א. אין שורשים.

ב. יש בדיוק שורש אחד.

ג. יש בדיוק שני שורשים.

ד. יש בדיוק שלושה שורשים.

ה. יש בדיוק ארבעה שורשים.

פתרון

1) רול – ננסה לגזור כדי להשתמש במסקנות **רול** ולהסיק על מספר השורשים המקסימלי של הפונקציה:

$$f(x)=x^2-\ln(1+x^2)-\cos(x)$$

$$f'(x)=2x-\frac{2x}{1+x^2}+\sin x$$

$$f''(x)=2-2\cdot\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}+\cos x=2-2\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}+\cos x$$

2) ערך הביניים – אפשר לנסות ולהמשיך לגזור אך נראה כי זו אינה הדרך וכי לא ניתן להסיק שום דבר טריוויאלי על הנגזרות. אז נפנה למשפט **ערך הביניים** כדי לפחות לקבל חסם תחתון על מספר השורשים. אפשר לשים-לב כי מתקיים בקצוות:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2-\ln(1+x^2)-\cos(x)\right)=\infty$$

זו פונקציה רציפה וכמו-כן מתקיים:

$$f(0)=0-\ln 1-\cos 0=-1<0$$

ולכן אפשר להסיק כי ישנם **לפחות 2 שורשים**. השאלה היא האם ישנם בדיוק שניים?

3) כדי להבין, ישנן 3 שיטות עיקריות:

א) <u>השיטה הראשונה – שיקולי זוגיות</u>

נשים-לב כי מדובר בפונקציה זוגית:

$$f(-x)=(-x)^2-\ln\left(1+(-x)^2\right)-\cos(-x)=x^2-\ln\left(1+x^2\right)-\cos(x)=f(x)$$

המשמעות היא סימטריה סביב ציר ה- y. כעת, מכיוון שאנחנו יודעים ש- $x=0$ הוא לא שורש של f, ומכיוון ש- f היא פונקציה זוגית, ניתן לומר בוודאות שאם יש ל- f שורשים, אזי יש לה **מספר זוגי** של שורשים.

כעת, נבחן את הפונקציה מצד ימין לציר y , כלומר עבור $x\geq 0$ (כאשר ההתנהגות של f עבור $x\leq 0$ זהה לחלוטין כי היא זוגית). אנחנו כבר יודעים ש- $f(0)<0$ וכי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$. מכאן נובע (בנפנופי ידיים) ש- f חותכת את ציר ה- x לפחות פעם אחת (ב- $x\geq 0$ כאמור).

המשמעות של "לפחות פעם אחת" במקרה הזה היא ש- f חותכת את הציר פעם אחת בלבד או 3 פעמים, או 5 פעמים וכך הלאה (נסו לשרטט). לכן משיקולי סימטריה אפשר להבין כי ל- f יש או בדיוק 2 שורשים או 6 שורשים, או 10 שורשים וכך הלאה.

כעת אם נבחן את התשובות נראה שהתשובה היחידה המתאימה לנו היא תשובה ג' – בדיוק 2 שורשים.

לפעמים השיטה הזאת לא עובדת כי יש יותר מתשובה אחת אפשרית או שהפונקציה לא זוגית ולא אי-זוגית ולכן חשוב להכיר שיטות נוספות, כמו השיטה הבאה למשל.

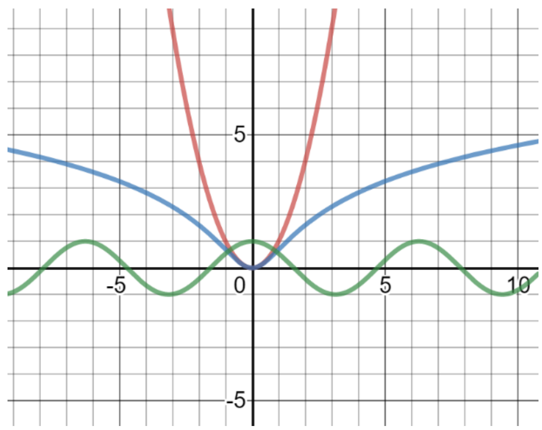
ב) <u>השיטה השנייה – שרטוט</u>

כדי להבין אפשר לנסות לשרטט. תחילה נבין דבר בסיסי ביחסי פונקציות. אם משווים פולינום (x^2) עם פונקציה לוגריתמית $\ln\left(1+x^2\right)$ וקוסינוס ($\cos x$), אזי ברור שעבור x מאוד גדולים, הפולינום "מנצח", כלומר הרבה יותר משמעותי. במילים אחרות הפולינום שואף כל כך מהר לאינסוף כך שמאוד מהר אפשר לומר כי שאר הפונקציות ממש **זניחות** ביחס אליו ($\ln$ היא פונקציה לוגריתמית "מנחיתה קצב", כלומר היא שואפת לאינסוף - אבל בעצלתיים, בשיפוע ממש אפסי, ו- $\cos$ פונקציה חסומה בין 1 ל- -1 ולכל היותר תגרום לאוסילציות לא משמעותיות, אבל לא באמת תשפיע על המגמה).

השאלה היא מה קורה בסביבת האפס (כלומר עבור X-ים קטנים), שם כבר <u>יש</u> השפעה לפונקציות האחרות על הפרבולה. כעת, f מורכבת מסכום (או הפרש) של שלוש פונקציות אלמנטריות:

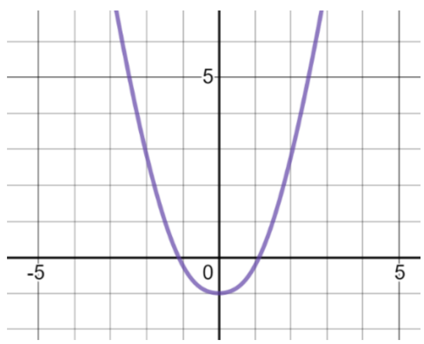
$$f\left(x\right)=x^2-\ln\left(1+x^2\right)-\cos\left(x\right)$$

כלומר אנחנו בעצם צריכים לחבר (או לחסר) שלוש פונקציות ולנסות להבין מה מקבלים, בעיקר עבור x קרובים לאפס, שהרי בקצוות כבר הבנו את התמונה. אז בואו נשרטט שלוש סקיצות קטנות על אותה מערכת הצירים של שלושת הפונקציות לעיל (מומלץ מאוד להכיר את הצורה הבסיסית של כל הפונקציות האלמנטריות!):



(x^2 באדום, $\ln\left(1+x^2\right)$ בכחול, $\cos x$ בירוק)

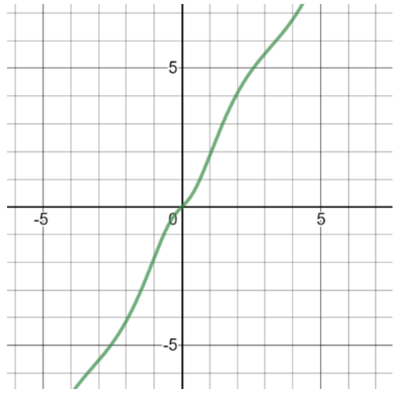
כעת אם ניקח את x^2 שממש "טסה" לאינסוף, ונחסיר ממנה את $\ln\left(1+x^2\right)$ אזי למעשה לא יקרה משהו דרמתי מידי, בסך הכל נקבל את אותה הפרבולה עם שיפוע קצת יותר עדין בסביבת האפס.
לעומת זאת ל- $\cos x$ יש השפעה בעיקר סביב האפס – אם נחסר את ה- $\cos x$ אזי כל הגרף יימשך למטה סביב האפס ונקבל גרף כלהלן (סקיצה משוערת):



$$f\left(x\right)=x^2-\ln\left(1+x^2\right)-\cos\left(x\right)$$

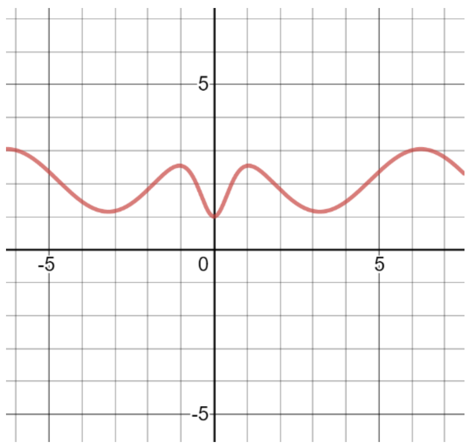
כלומר מתוך כך אפשר לשער שיש **בדיוק שני שורשים** לפונקציה הזאת.

את אותה טכניקה גרפית אפשר להפעיל גם על הנגזרת ולהיווכח שיש לה בדיוק שורש אחד:



$$f'(x)=2x-\frac{2x}{1+x^2}+\sin x$$

או לחלופין על הנגזרת השנייה ולהבין כי אין לה שורשים כלל:



$$f''(x)=2-2\frac{\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}+\cos x$$

ג) <u>השיטה השלישית – קירוב טיילור-מקלורן</u>

לחלופין אפשר להשתמש בשיטת קירוב טיילור-מקלורן לפונקציות האלו, שהרי עיקר השפעתן כאמור הוא עבור ה- X-ים הקטנים, שם מתקיים:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-+...$$

$$\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-+...$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+...$$

מכיוון שמעלת הפולינום בפונקציה הנתונה הוא x^2 , מספיק לפתח את הפונקציות עד לסדר המוביל של הפולינום בפונקציה, כלומר עד סדר שני, ואז נקבל בקירוב:

$$f(x)=x^2-\ln(1+x^2)-\cos(x)\approx x^2-(x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)=\frac{x^2}{2}-1$$

כלומר קיבלנו פרבולה בעלת שני שורשים ב- $x=\pm\sqrt{2}$, שזה קירוב מספיק טוב בשבילנו כדי להבין שזה גם מספר השורשים של הפונקציה המקורית!

לסיכום, כאשר שואלים אותנו על מספר השורשים לפונקציה, נפעל לפי השלבים הבאים:

<u>השלבים למציאת מספר שורשים לפונקציה</u>

1) רול – מנסים לגזור ולהסיק **חסם עליון על מספר השורשים** לפי מסקנות רול (לפעמים זה לא הולך טוב כמו בשאלה הזאת אבל בכל מקרה מתקדמים לשלב הבא).

2) ערך הביניים – עוברים למשפט ערך הביניים וממנו מקבלים **חסם תחתון על מספר השורשים** (אם הצלחנו אזי סיימנו, אם לא אז עוברים לשלב 3).

3) מכאן ישנן 3 שיטות עיקריות:

א) שיקולי זוגיות

ב) שרטוט

ג) קירוב טיילור-מקלורן

וכך נקבל את מספר השורשים.

שאלה מספר 2 – גזירות ורציפות

הוכח/הפרך את הטענה הבאה:

אם $f\left(x\right)$ גזירה לכל x אזי $\left|f\left(x^3\right)\right|$ רציפה לכל x.

פתרון

הטענה נכונה, נוכיח.

אם $f\left(x\right)$ גזירה לכל x אזי לפי משפט $f\left(x\right)$ רציפה לכל x.

$f\left(x\right)$ רציפה לכל x ו- x^3 פונקציה אלמנטרית רציפה לכל x לכן גם ההרכבה שלהן $f\left(x^3\right)$ רציפה לכל x (ראה טענה מספר 1 בנוספח למטה).

כמו-כן אם f רציפה בנקודה אזי גם $\left|f\right|$ רציפה בנקודה (ראה טענה מספר 2 בנוספח למטה), לכן בסך הכל גם $\left|f\left(x^3\right)\right|$ רציפה לכל x.

מ.ש.ל

נספח

טענה מספר 1

אם $g\left(x\right)$ רציפה ב- x_0 ו- $f\left(x\right)$ רציפה ב- $g\left(x_0\right)$ אזי גם ההרכבה שלהן $f\left(g\left(x\right)\right)$ רציפה ב- x_0.

הוכחה (לא פורמלית)

$$\lim_{x\to x_0} f\left(g\left(x\right)\right) \overset{f\text{ continuous}}{=} f\left(\lim_{x\to x_0} g\left(x\right)\right) \overset{g\text{ continuous}}{=} f\left(g\left(\lim_{x\to x_0} x\right)\right) = f\left(g\left(x_0\right)\right)$$

טענה מספר 2

אם $f\left(x\right)$ רציפה ב- x_0 אזי גם $\left|f\left(x\right)\right|$ רציפה ב- x_0.

הוכחה

למדנו משפט שאומר שאם $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$ אזי $\lim_{x\to x_0}\left|f\left(x\right)\right|=\left|L\right|$. מהנתון ש- $f\left(x\right)$ רציפה ב- x_0 מתקיים ש- $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$, ולכן גם $\lim_{x\to x_0}\left|f\left(x\right)\right|=\left|f\left(x_0\right)\right|$.

לחלופין – ניתן להשתמש שוב בטענה מספר 1 של הרכבת פונקציות רציפות שהרי $\left|x\right|$ הינה פונקציה אלמנטרית רציפה ולכן אם f רציפה בנקודה אזי גם $\left|f\right|$ רציפה בנקודה כהרכבה של פונקציות אלמנטריות רציפות בנקודה.

שאלה מספר 3 – משפט נקודת השבת

נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$, אזי:

א. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)+1=c$.

ב. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)e^{c}=c$.

ג. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)+1=c^{2}$.

ד. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)\cos(c)=c-1$.

ה. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)\sin\left(\frac{c}{2}+1\right)=c$.

פתרון

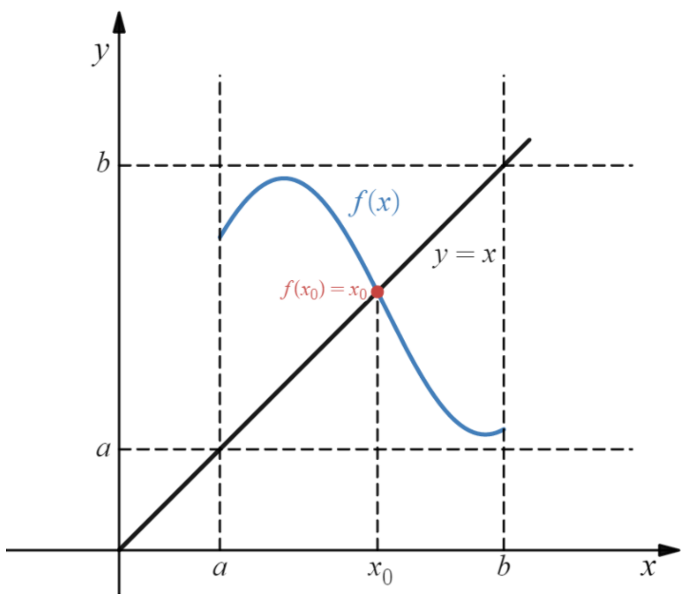
קודם כל ניזכר, מה זאת נקודת שֶׁבֶת? נקודת שֶׁבֶת היא נקודת החיתוך בין הפונקציה f לישר $y=x$

כעת ניזכר במשפט:

משפט נקודת השבת:

אם פונקציה $f:[a,b]\to[a,b]$ רציפה אזי יש לה נקודת שֶׁבֶת, כלומר נקודה המקיימת: $f(c)=c$.

במילים אחרות: אם פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וכל ערכיה נמצאים בקטע $[a,b]$, אזי יש לה נקודת חיתוך עם הישר הלינארי $y=x$ בקטע, כלומר נקודה המקיימת $f(c)=c$ (נקודת שֶׁבֶת).



<u>הערה על התחום והטווח של הפונקציה</u> $\underbrace{f:[a,b]}_{\text{תחום ההגדרה}}\rightarrow\underbrace{[a,b]}_{\text{טווח}}$

1) תחום ההגדרה של הפונקציה הוא **כל** x השייך לקטע הסגור $[a,b]$, כלומר $a\le x\le b$.

2) טווח הפונקציה הוא הקטע $[a,b]$, כלומר $a\le f(x)\le b$.

3) שימו-לב שהפונקציה לא בהכרח **על** הטווח שלה (המשפט לא דורש זאת), כלומר **התמונה של הפונקציה** (ערכי ה- y שהפונקציה מחזירה בפועל) **מוכלת** בקטע $[a,b]$ ויכולה להיות כל תת-קטע מתוך הטווח שלה $[c,d]\subseteq[a,b]$ (כמו שאפשר למשל לראות באיור, הפונקציה לא בהכרח מכסה את כל ערכי ה- y בין a ל- b, אלא תת-קטע המוכל ביניהם).

בשאלה שלנו נגדיר פונקציה $g(x)$ ונעבוד עם התשובות. שימו-לב שאנחנו מחפשים פונקציה שתקיים שהיא רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ ושערכי ה- y שלה נמצאים בקטע הסגור $[0,1]$ ולא חורגים ממנו.

<u>תשובה א'</u>: קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)+1=c$.

נגדיר את הפונקציה $g(x)=f(x)+1$. זו פונקציה רציפה לכל $x\in[0,1]$ כסכום של פונקציות אלמנטריות רציפות לכל x בקטע, אבל היא יכולה להחזיר ערכי y שהם **מחוץ** לקטע $[0,1]$ כי $g(x)=\underbrace{f(x)}_{0\le f(x)\le 1}+1\ge 1$ לכל $x\in[0,1]$, לכן לפונקציה זו לא בהכרח קיימת נקודת שֶׁבֶת.

<u>תשובה ב'</u>: קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)e^{c}=c$.

נגדיר את הפונקציה $g(x)=f(x)e^{x}$. זו פונקציה רציפה לכל $x\in[0,1]$ כמכפלה של פונקציות אלמנטריות רציפות לכל x בקטע, אבל היא לא בהכרח מחזירה ערכי y שהם בקטע $[0,1]$ כי $e^{x}\ge 1$ לכל $x\in[0,1]$ אז $\underbrace{f(x)}_{0\le f(x)\le 1}\cdot\underbrace{e^{x}}_{\ge 1,\forall x\in[0,1]}$ לא בהכרח מחזיר מספר בין 0 ל- 1, לכן לפונקציה זו לא בהכרח קיימת נקודת שֶׁבֶת.

תשובה ג': קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)+1=c^2$.

נגדיר את הפונקציה $g(x)=\sqrt{f(x)+1}$. זו פונקציה רציפה לכל $x\in[0,1]$ כסכום והרכבה של פונקציות אלמנטריות רציפות לכל x בקטע, אבל היא יכולה להחזיר ערכי y שהם מחוץ לקטע $[0,1]$ כי $g(x)=\sqrt{\underbrace{f(x)}_{0\le f(x)\le 1}+1}\ge 1$ לכל $x\in[0,1]$, לכן לפונקציה זו לא בהכרח קיימת נקודת שֶׁבֶת.

הערת אגב: לו היו אומרים: "קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)=c^2$ ", זה כבר כן היה נכון כי אז היינו מגדירים $g(x)=\sqrt{f(x)}$ אשר כל ערכיה נמצאים בקטע הסגור $[0,1]$ ואשר רציפה לכל x בקטע כהרכבה של אלמנטריות רציפות בקטע ולכן קיימת ל- g נקודת שֶׁבֶת בקטע $c\in[a,b]$ כך ש- $g(c)=c$, כלומר כך ש- $f(c)=c^2$ $\sqrt{f(c)}=c\Rightarrow$.

תשובה ד': קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)\cos(c)=c-1$.

נגדיר את הפונקציה $g(x)=f(x)\cos x+1$. זו פונקציה רציפה לכל $x\in[0,1]$ כסכום ומכפלה של פונקציות אלמנטריות רציפות לכל x בקטע אבל היא יכולה להחזיר ערכי y שהם מחוץ לקטע $[0,1]$ כי לכל $x\in[0,1]$ $g(x)=\underbrace{f(x)}_{0\le f(x)\le 1}\cdot\underbrace{\cos x}_{0\le f(x)\le 1}+1\ge 1$, לכן לפונקציה זו לא בהכרח קיימת נקודת שֶׁבֶת.

תשובה ה': קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)\sin\left(\frac{c}{2}+1\right)=c$.

נגדיר את הפונקציה $g(x)=f(x)\sin\left(\frac{x}{2}+1\right)$. זו פונקציה רציפה לכל $x\in[0,1]$ כמכפלה של פונקציות אלמנטריות רציפות לכל x . נתבונן בפונקציית הסינוס: בקטע $0\le x\le 1$ הפונקציה חיובית ואף מונוטונית עולה. עבור $x=0$ מתקבל הערך $\sin(1)$. עבור $x=1$ מתקבל הערך $\sin(1.5)$. זאת- אומרת שלכל $x\in[0,1]$ יוצא ש- $\sin\left(\frac{x}{2}+1\right)\in[\sin(1),\sin(1.5)]\subset[0,1]$. ולכן בסך הכל לכל $x\in[0,1]$ מתקיים כי $g(x)=f(x)\sin\left(\frac{x}{2}+1\right)\subseteq[0,1]$ ולכן לפי משפט נקודת השֶׁבֶת יש ל- g נקודה המקיימת כי $g(c)=c$ כלומר כך ש- $f(c)\sin\left(\frac{c}{2}+1\right)=c$.

ולכן התשובה הנכונה היא תשובה ה'.

שאלה מספר 4 – מספר פתרונות למשוואה

מספר הפתרונות של המשוואה $\ln x+\arctan x-x+1=0$ בקטע $\left(0,\infty\right)$ הוא:

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

ה. 4

פתרון

בואו נפתור בצורה "אמריקאית", כלומר נדלג על הנימוקים ונראה איך פותרים בצורה זריזה ויעילה.
נתחיל בלגזור את הפונקציה, אנחנו רוצים לגזור עד שנוכל להגיע למסקנה על אחת הנגזרות, שהיא חיובית או שלילית ולכן אין לה שורשים, ואז לפי מסקנות משפט רול (ראו שאלה מספר 7 במרתון המצולם, גם במפגש השני וגם בתחילת המפגש השלישי, שם הראיתי דרך פתרון נוספת ללא שימוש במסקנות רול). נסיק כלפי מעלה כמה שורשים יש לפונקציה המקורית לכל היותר.

$$f\left(x\right)=\ln x+\arctan x-x+1$$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}-1$$

$$f''\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)\overset{\forall x>0}{<}0$$

זאת-אומרת שלנגזרת השנייה אין שורשים, ולכן (לפי מסקנות רול) לנגזרת הראשונה יש לכל היותר שורש אחד, ולכן לפונקציה המקורית יש לכל היותר שניים.
כעת איך נראה שיש לה בדיוק שניים? נעזר במשפט ערך הביניים.

נזכיר כי אנו בוחנים את הפונקציה בקטע הפתוח $\left(0,\infty\right)$. נשים-לב כי כאשר מתקרבים ל- $x=0$ מימין ה- $\ln x$ שואפת ל- $-\infty$ וכל שאר האיברים זניחים כמספרים סופיים:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x+\arctan x-x+1\right)=-\infty$$

ולכן קיימת נקודה $x_0>0$ בסביבה ימנית כלשהי של ה- 0 כך ש- $f\left(x_0\right)<0$ (זהו נימוק בנפנופי ידיים. לו השאלה היתה פתוחה היינו צריכים לנמק בזהירות עם הגדרת הגבול כמו למשל במה שעשינו בשאלה מספר 8, סעיף ב' במרתון המצולם).

כמו-כן כאשר משאיפים את $x\to\infty$ פונקציות ה- $\ln x$ וה- $\arctan x$ זניחות לחלוטין לעומת הפולינום $-x$, ולכן מקבלים:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln x+\arctan x-x+1\right)=-\infty$$

ולכן קיימת נקודה $x_1>0$ כך ש- $f\left(x_1\right)<0$.

זאת-אומרת שבקצוות הקטע $\left(0,\infty\right)$ הפונקציה שלילית (והיא רציפה כסכום של אלמנטריות רציפות),

אז עכשיו כל שנותר לנו זה למצוא נקודה אחת בקטע שבה הפונקציה חיובית כדי להוביל אותנו לשני שורשים. אז נציב למשל $x=1$ ונקבל:

$$f\left(1\right)=\underbrace{\ln 1}_{=0}+\underbrace{\arctan 1}_{=\frac{\pi}{4}}-1+1=\tfrac{\pi}{4}>0$$

ולכן לפי משפט עה"ב יש לפונקציה לכל הפחות 2 שורשים ולכן בסה"כ יש לה בדיוק שניים, כלומר תשובה ג'.

שאלה מספר 5 – אי-שיוויונות

נכון / לא נכון: $\tan x \ge x$ לכל x בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

פתרון

הטענה נכונה, נוכיח.

נגדיר פונקציית עזר: $h(x)=\tan x - x$ ונראה ש- $h(x)\ge 0$ לכל $0\le x<\frac{\pi}{2}$.

נשים-לב כי מתקיים: $h(0)=\tan 0 - 0 = 0$.

בנוסף, h גזירה ורציפה כהפרש של שני פונקציות גזירות ורציפות:

$$h'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x \overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\ge} 0$$

לכן לפי מסקנות משפט לגרנז' h מונוטונית עולה לכל $0\le x<\frac{\pi}{2}$, ומכיוון ש- $h(0)=0$ נובע ש- $h(x)\ge 0$ לכל x בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, כלומר: $\tan x \ge x$.

מ.ש.ל

שאלה מספר 6 – אי-שיוויונות

נכון / לא נכון: $\ln\left(1+x+x^2\right)\le x^2$ לכל x.

פתרון

הטענה לא נכונה. למשל בהצבת $x=1$ נקבל באגף ימין 1 ובאגף שמאל $\ln 3$, אבל:

$$\ln 3>\ln e=1$$

מה היה הופך את הטענה לנכונה? למשל אי-השוויון הבא הוא נכון לכל x: $\ln\left(1+x\right)\le x$, ומכאן גם $\ln\left(1+x+x^2\right)\le x+x^2$, אבל בשאלה המקורית שינו קצת, מה שרמז שהטענה אינה נכונה.

<u>שאלה מספר 7 – סדרות ותתי-סדרות</u>

<u>נכון / לא נכון</u>: $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ ו- $\lim_{n\to\infty} a_{3n} = L$, אזי גם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

<u>פתרון</u>

<u>הערה</u>: אם לא צוין כלום בדר"כ הכוונה היא ש- L הוא מספר סופי כלשהו, כלומר הגבול קיים וסופי.

הטענה <u>לא נכונה</u>, להלן דוגמא נגדית.

למשל הסדרה: $\overset{a_1}{0}, \overset{a_2}{1}, \overset{a_3}{1}, \overset{a_4}{1}, \overset{a_5}{0}, \overset{a_6}{1}, \overset{a_7}{0}, \overset{a_8}{1}, \overset{a_9}{1}, \overset{a_{10}}{1}, \overset{a_{11}}{0}, \overset{a_{12}}{1} \ldots$

או בצורה סגורה: $a_n = \begin{cases} 1 \ , & n = 2k, 3k \\ 0 \ , & else \end{cases}$, כאשר $k = 1, 2, \ldots$.

אזי $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{3n} = 1$ אבל ל- a_n לא קיים כלל גבול!

שאלה מספר 8 – סדרות ותתי-סדרות

<u>נכון / לא נכון</u>: $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ ו- $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = L$, אזי גם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

<u>פתרון</u>

הטענה <u>נכונה</u>, נוכיח.

יהי $\varepsilon > 0$.

נתון ש- $a_{2n} \to L$ לכן קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$: $|a_{2n} - L| < \varepsilon$.

נתון ש- $a_{2n+1} \to L$ לכן קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$: $|a_{2n+1} - L| < \varepsilon$.

נבחר $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$ אזי לכל $n > N$ מתקיים $n > 2N_1$ וגם $n > 2N_2 + 1$.

(כי אם n גדול מהמקסימום בין שני מספרים אז הוא גדול מכל אחד מהם בנפרד)

נפרק לשני מקרים, n זוגי ו- n א"ז:

אם n זוגי אזי נסמן $n = 2m$ ואז $2m > 2N_1$ (כי $n > 2N_1$) ⇐ $m > N_1$.

מכאן, לפי הנתון לכל $m > N_1$: $|a_n - L| = |a_{2m} - L| < \varepsilon$

אם n אי-זוגי אזי נסמן $n = 2m+1$ ואז $2m+1 > 2N_2 + 1$ (כי $n > 2N_2 + 1$) ⇐ $m > N_2$.

מכאן, לפי הנתון לכל $m > N_2$: $|a_n - L| = |a_{2m+1} - L| < \varepsilon$

ובכל מקרה לכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$ לכן $a_n \to L$.

מ.ש.ל

<u>הערה:</u>

שימו לב שזה נכון לכל אוסף סופי של תתי-סדרות שביחד מכסות את כל איברי הסדרה המקורית ומתכנסות לאותו הגבול. למשל הנה כמה דוגמאות:

אם a_{2n}, a_{2n+1} מתכנסות לאותו הגבול אזי גם a_n מתכנסת לאותו הגבול.

אם $a_{3n}, a_{3n+1}, a_{3n+2}$ מתכנסות לאותו הגבול אזי גם a_n מתכנסת לאותו הגבול.

והנה דוגמא מפתיעה, נסו לחשוב למה גם היא נכונה:

אם a_{2n}, a_{2n+1}, a_{3n} מתכנסות לאותו הגבול אזי גם a_n מתכנסת לאותו הגבול.

רמז: תתי-הסדרות שלה פורסות את כל המרחב.
לפתרון מלא ראה את הקורס באתר סטאדיס, פרק תרגול נוסף – תתי-סדרות, שאלה מספר 15.

שאלה מספר 9 – סדרות ותתי-סדרות

<u>נכון / לא נכון</u>: $\lim_{n\to\infty}|a_{2n}|=L$ ו- $\lim_{n\to\infty}|a_{2n-1}|=L$, אזי גם $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

<u>פתרון</u>

הטענה <u>לא נכונה</u>, להלן דוגמא נגדית:

למשל הסדרה: $a_n=(-1)^n$, אזי

$$a_{2n}=(-1)^{2n}=1$$

$$a_{2n-1}=(-1)^{2n-1}=-1$$

$$\lim_{n\to\infty}|a_{2n}|=\lim_{n\to\infty}|a_{2n-1}|=\lim_{n\to\infty}(1)=1$$

אבל הגבול של a_n כלל לא קיים!

שאלה מספר 10 – תכונות הרציפות

<u>נכון / לא נכון</u>: אם f רציפה בקטע $\left(-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$ לכל $n\geq 1$, אזי f רציפה ב- $(-1,1)$.

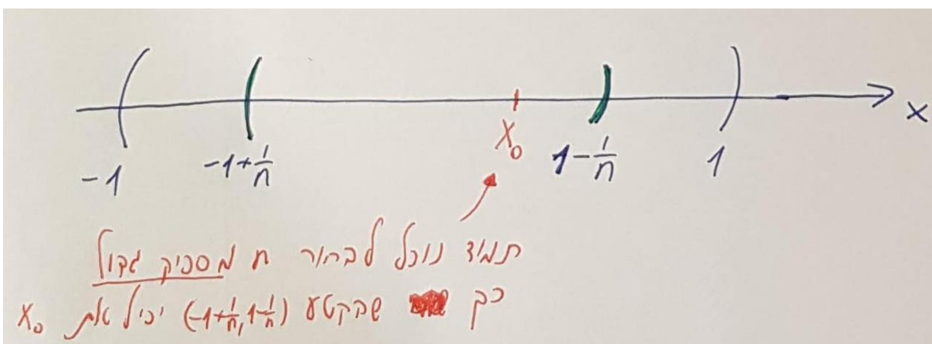
<u>פתרון</u>

הטענה <u>נכונה</u>, נוכיח:

נתון כי f רציפה בקטע $\left(-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$ לכל $n\geq 1$.

נניח בשלילה כי f לא רציפה בקטע $(-1,1)$, כלומר כי קיימת נקודה $x_0\in(-1,1)$ ש- f לא רציפה בה. אבל תמיד נוכל לבחור n מספיק גדול כך ש- $x_0\in\left(-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$, והרי f רציפה בכל נקודה בקטע זה, ולכן בפרט f רציפה ב- x_0 ← סתירה.

לכן בהכרח f רציפה בכל נקודה בקטע הפתוח $(-1,1)$.



שאלה מספר 11 – תכונות משפטים יסודיים

נכון / לא נכון:

אם f פונקציה מונוטונית עולה ממש, רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b), אזי מתקיים:

$$f(b)-a \ge f(a)-b$$

פתרון

הטענה נכונה, נוכיח.

מהנתון f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) ולכן לפי משפט לגרנז' קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש-

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

כמו-כן נתון כי f פונקציה מונוטונית עולה ממש ולכן עבור $b>a$ מתקיים כי $f(b)>f(a)$, ולכן:

$$f'(c)=\frac{\overbrace{f(b)-f(a)}^{>0}}{\underbrace{b-a}_{>0}}>0$$

בפרט אפשר לומר כי:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0>-1$$

$$f(b)-f(a)>(-1)(b-a)$$

$$f(b)-f(a)>a-b$$

$$f(b)-a>f(a)-b$$

מ.ש.ל

שאלה מספר 12 – תכונות הנגזרת

<u>נכון / לא נכון</u>: אם הנגזרות החד-צדדיות של f בנקודה x_0 קיימות, אזי f רציפה ב- x_0.

<u>הקדמה</u>

באופן מפתיע הטענה הזאת נכונה. מדוע באופן מפתיע? כי אנחנו יודעים שגזירות גוררת רציפות. אנחנו גם יודעים שאם הנגזרות החד-צדדיות קיימות **ושוות זו לזו**, אזי הפונקציה גזירה (ולכן גם רציפה). אבל כאן **לא** אמרו לנו שהנגזרות החד-צדדיות **שוות זו לזו**, אלא רק שהן **קיימות**. אז כמובן שאי-אפשר להסיק גזירות (כי בשביל זה הן היו צריכות להיות שוות זו לזו כאמור), אבל באופן מפתיע (!) נוכל להסיק מכך **רציפות**. כלומר לרציפות מספיק שהנגזרות החד-צדדיות יהיו **קיימות** בלבד. דוגמא טובה שכדאי שתהיה לנו בראש היא פונקציית הערך המוחלט $f(x)=|x|$. נשים-לב כי זו פונקציה רציפה אך לא גזירה בנקודת השפיץ $x=0$. גם נשים-לב כי הנגזרות החד-צדדיות שלה סביב הראשית קיימות, אך אינן שוות זו לזו.

פונקציית הערך המוחלט הינה פונקציה רציפה:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x\ ,\ x\geq 0 \\ -x\ ,\ x<0 \end{cases}$$

הנגזרות החד-צדדיות שלה קיימות אך שונות זו מזו:

$$f'(x)=\begin{cases} 1\ ,\ x>0 \\ -1\ ,\ x<0 \end{cases}$$

אז זאת דוגמא לפונקציה שהנגזרות החלקיות שלה בראשית קיימות (אך אינן שוות זו לזו) והיא אכן פונקציה רציפה בראשית.

אגב שימו-לב למשל שעבור הפונקציה <u>הלא</u> רציפה הבאה למשל (שרטטו במדויק):

$$f(x)=\begin{cases} x+1,\ x>0 \\ -x\ \ ,\ x\leq 0 \end{cases}$$

הנגזרת החד-צדדית משמאל קיימת ושווה ל- -1 אך הנגזרת החד-צדדית מימין **לא קיימת** (הגבול יוצא אינסופי, הוכיחו זאת לפי הגדרת הנגזרת החד-צדדית), לכן זו אינה דוגמא שסותרת את הטענה.

כל אלו כמובן רק דוגמאות שיהיו לנו בראש אך לא הוכחה.

אז בואו נוכיח.

<u>הוכחה</u>

מהנתון הנגזרת החד-צדדית מימין קיימת, כלומר הגבול הבא קיים וסופי:

$$f'_+\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

נרשום:

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f\left(x\right)-f\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)+\left(x-x_0\right)\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{\left(x-x_0\right)}$$

ובהפעלת הגבול החד-צדדי מימין על שני האגפים נקבל:

$$\lim_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0^+}\left(f\left(x_0\right)+\underbrace{\left(x-x_0\right)}_{\to 0}\underbrace{\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{\left(x-x_0\right)}}_{\to f'_+\left(x_0\right)}\right)=f\left(x_0\right)$$

כלומר קיבלנו כי $\lim_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

נתון כי גם הנגזרת החד-צדדית משמאל קיימת, כלומר הגבול הבא קיים וסופי:

$$f'_-\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

לכן באותו האופן בדיוק מתקיים כי $\lim_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$ ולכן לפי משפט שוויון גבולות החד-צדדיים מתקיים $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$, כלומר f רציפה ב- x_0.

מ.ש.ל.